Innovative Teaching Approaches in development of Software Designed Instrumentation and its application in real-time systems

Theory of Robotics Systems

Kinematic of mobile robots

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Innovative Teaching Approaches in development of Software Designed Instrumentation and its application in real-time systems

Faculty of Technical Sciences

Ss. Cyril and Methodius University
Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies

Zagreb University of Applied Sciences

School of Electrical Engineering
University of Belgrade

Faculty of Physics
Warsaw University of Technology

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Teorija robotskih sistema

(13E054TRS)

Deo 3:

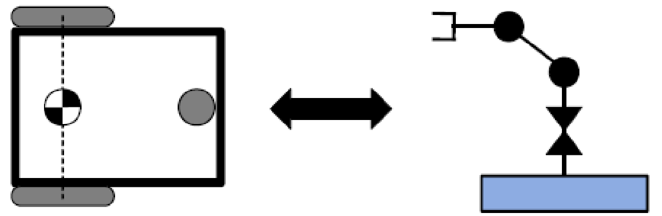
Kinematika mobilnih robota

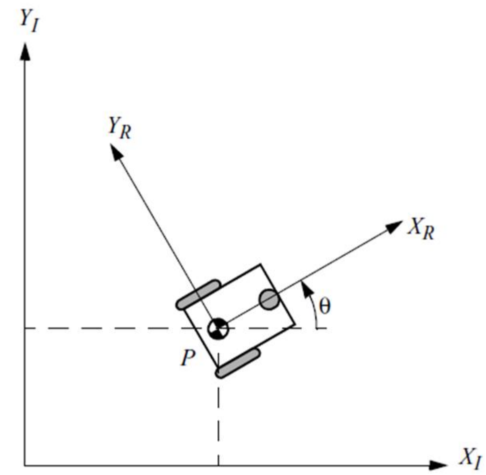
Nastavnik: **doc. Kosta Jovanović**

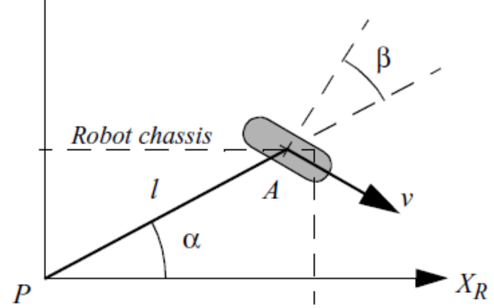
e-mail: **kostaj@etf.rs**

Sadržaj

- Osnovni parametri kinemetike AMR
- Opšti model kinematike
  (veza lokalnog i globalnog koordinantog sistema)
- Kinematika točkova i ograničenja
- Manevrabilnost AMR
- Kontrola kretanja AMR



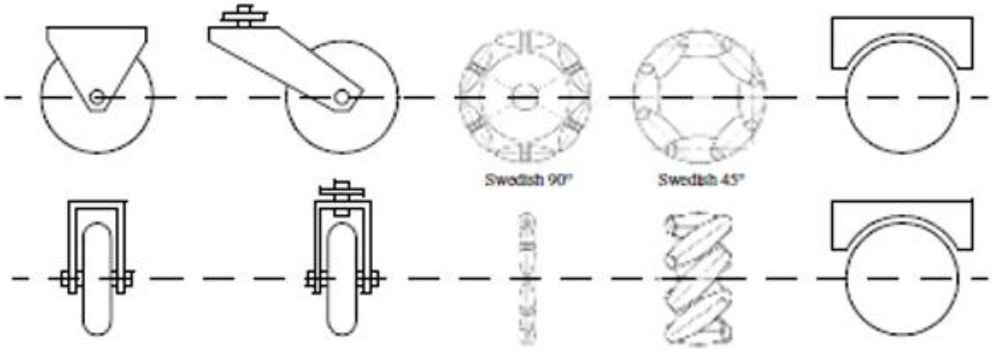




Osnovni parametri kinematike AMR

➢ **Fokus na robote sa točkovima**

- **pretežno zastupljeni** (jednostavna konstrukcija, efikasan pogon – pogoni ne trpe gravitaciono opterećenje, nema problema sa stabilnošću - održanjem balansa, ali samo po ravnom terenu!)
- **potrebno je tri točka da se obezbedi stabilnost – balans** (ako je projekcija CM u okviru oslonačkog poligona)
- **dodavanjem dodatnih točkova (više od 3) bolje performanse ali kompleksnija mehanika** (potrebno vešanje)
- **vrste točkova:** klasičan, kastor, švedski (omnidirekcioni), sferični (kugla)



- **najveći izazov pouzdanost senzorskih informacija i merenje kretanja**

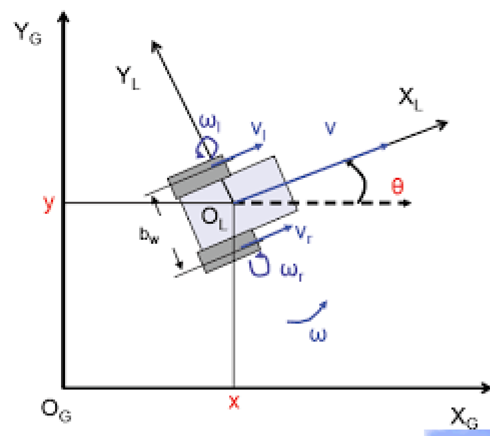
Osnovni parametri kinematike AMR

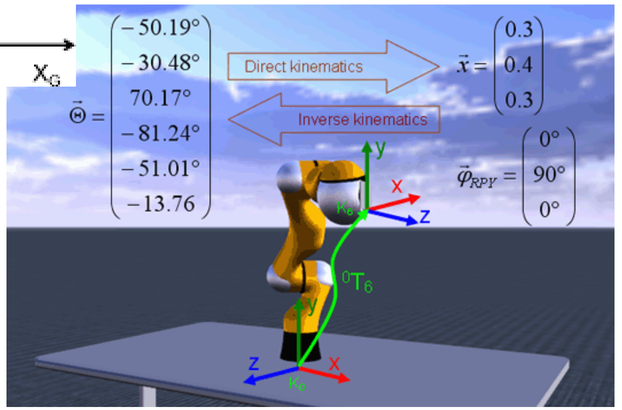
- **Direktni problem kinematike q(t) → X(t)**
- Pitanje: Kako će se robot kretati u prostoru ako znamo kretanje pojedinačnih točkova robota?
- **Inverzni problem kinematike X(t) → q(t)**
- Pitanje: Ako je dato željeno kretanje mobilnog robota u prostoru, kako treba da se kreću pojedini točkovi da bi se to kretanje i ostvarilo?

Paralela manipulatora i mobilnih robota:

zglobovi robota ↔ točkovi

pozicija TCP ↔ pozicija centra mase

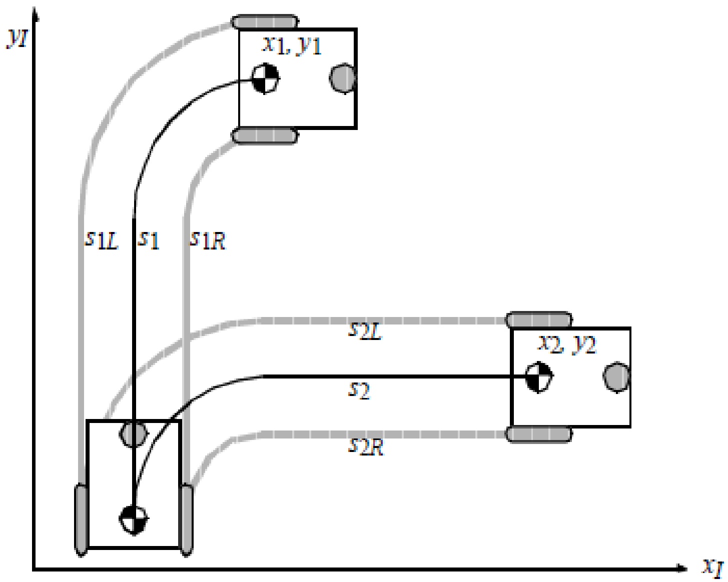




Osnovni parametri kinematike AMR

	manipulator	mobilni robot
radni prostor	mogući položaji završnog uređaja robota u prostoru (zavisi od ograničenja kretanja pojedinih upravljivih osa, i prepreka u prostoru)	mogući položaji mobilnog robota u prostoru (može biti drugačiji u različitim sredinama, od konfiguracije okruženja i prepreka u prostoru)
upravljivost	moguće trajektorije (u zavisnosti od trenutnog položaja – konfiguracije: singularni položaji, trenutnih brzina, maksimalnih brzina po osama)	moguće trajektorije (u zavisnosti od konfiguracije – rasporeda i vrste točkova i ograničenja upravljivih osa, trenutne brzine)
uticaj dinamike	opterećenje koje nosi ograničava i radni prostor i performanse – moguće trajktorije	pozicija centra mase robota ograničava performanse (balans robota pri skretanju)

Osnovni parametri kinematike AMR



$$s_1 = s_2, s_{1R} = s_{2R}, s_{1L} = s_{2L}$$

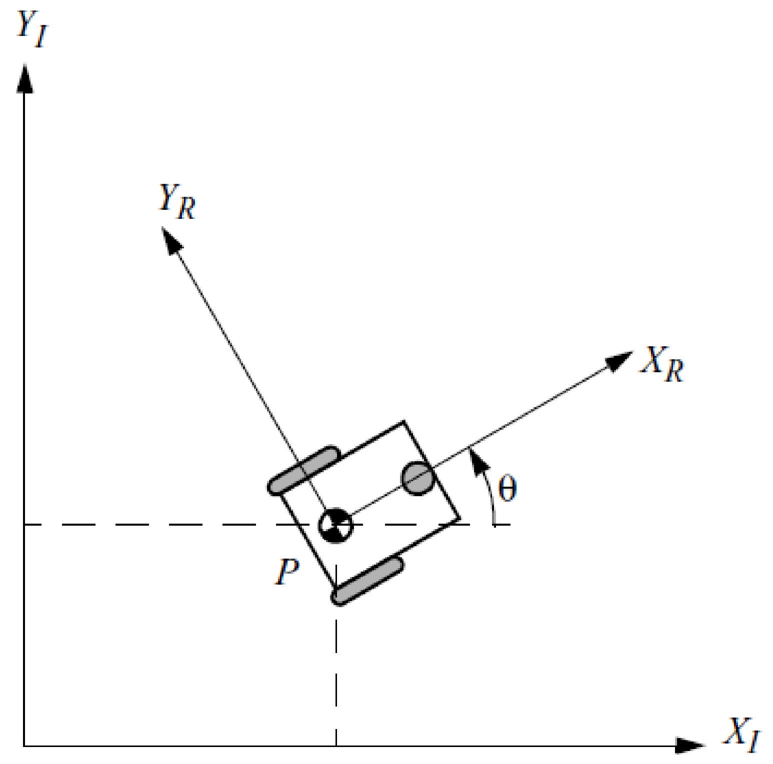
$$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$$

	manipulator	mobilni robot
procena-merenje pozicije	jednoznačno određeno trenutnom pozicijom upravljivih osa i pozicijom osnove robota (tačnost/ponovljivost u milimetrima)	ne trenutnim već integracijom merenja (enkoder, potenciometar, kacelerometar/žiroskop, kompas), → problem proklizavanja i akumulirane greške!
neholonomni sistemi	merenjem pomeraja svakog zgloba jednoznačno određena pozicija završnog uređaja robota (TCP)	merenjem pređene putanje svakog točka NIJE određena pozicija AMR

Opšti model kinematike AMR

- Direktni model kinematike:
  kretanja pojedinih točkova (upravljive ose)

  kretanje robota u prostoru



Opšti model kinematike AMR

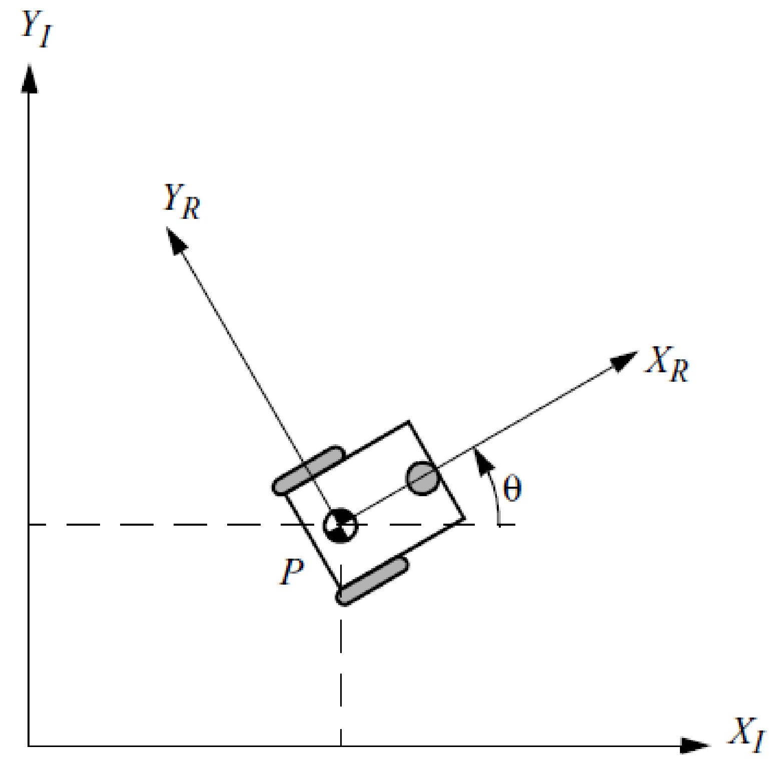
- Direktni model kinematike:
  kretanja pojedinih točkova (upravljive ose)

  ⇓

  kretanje robota u prostoru

➢ Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota

➢ Faza 2: uticaj svakog točka ne kretanje robota (u lokalnom koordinatnom sistemu) kao i konfiguracija (raspored) točkova u odnosu na šasiju robota



Opšti model kinematike AMR

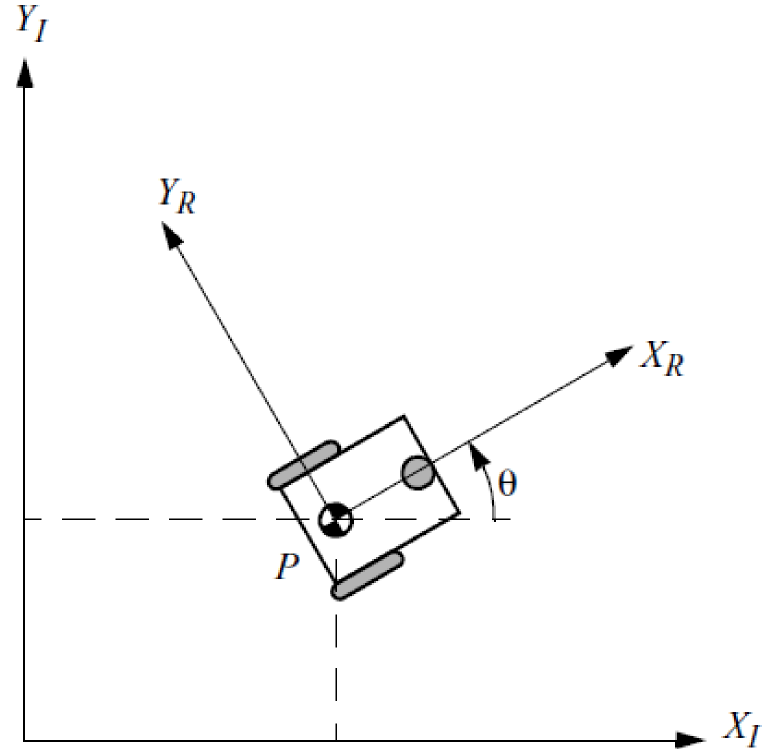
- **Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota**

- **Globalni koordinatni sistem (proizvoljno izabran) sa početkom u tački O:**

$$\{X_I, Y_I\}$$

- **Lokalni koordinatni sistem AMR fiksan u odnosu na proizvoljno izabranu tačku robota P:**

$$\{X_R, Y_R\}$$



Opšti model kinematike AMR

- **Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota**

- **Globalni koordinatni sistem (proizvoljno izabran) sa početkom u tački O:**

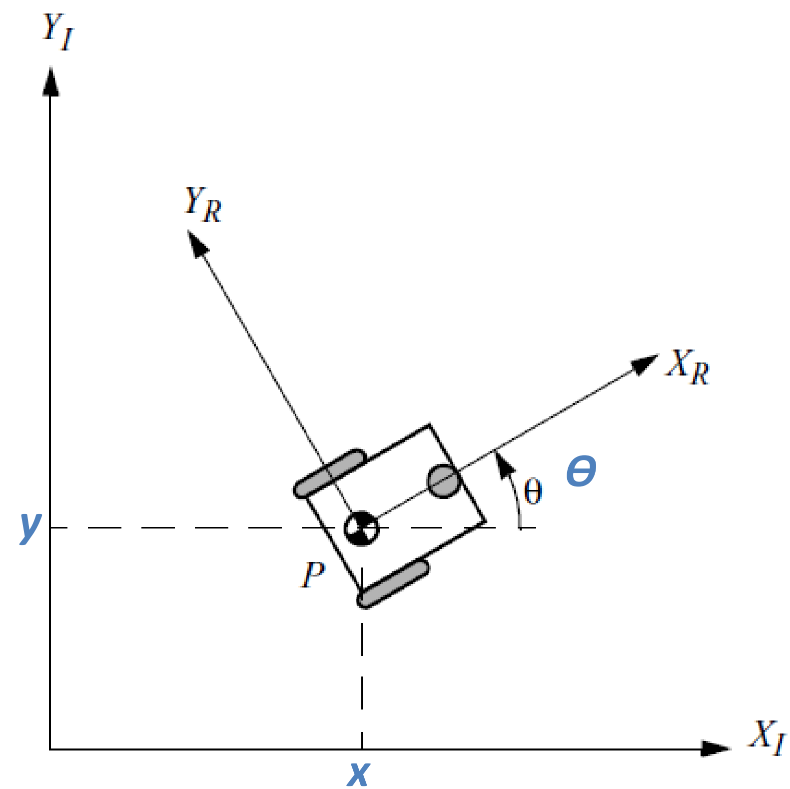
$$\{X_I, Y_I\}$$

- **Lokalni koordinatni sistem AMR fiksan u odnosu na proizvoljno izabranu tačku robota P:**

$$\{X_R, Y_R\}$$

- **Relativni položaj dva 2-D koordinatna sistema u istoj ravni je određen pomoću 3 parametra:**
  - ***x*** – položaj tačke P na X_I osi
  - ***y*** – položaj tačke P na Y_I osi
  - ***Θ*** – ugao rotacije između dva koordinatna sistema

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$



Opšti model kinematike AMR

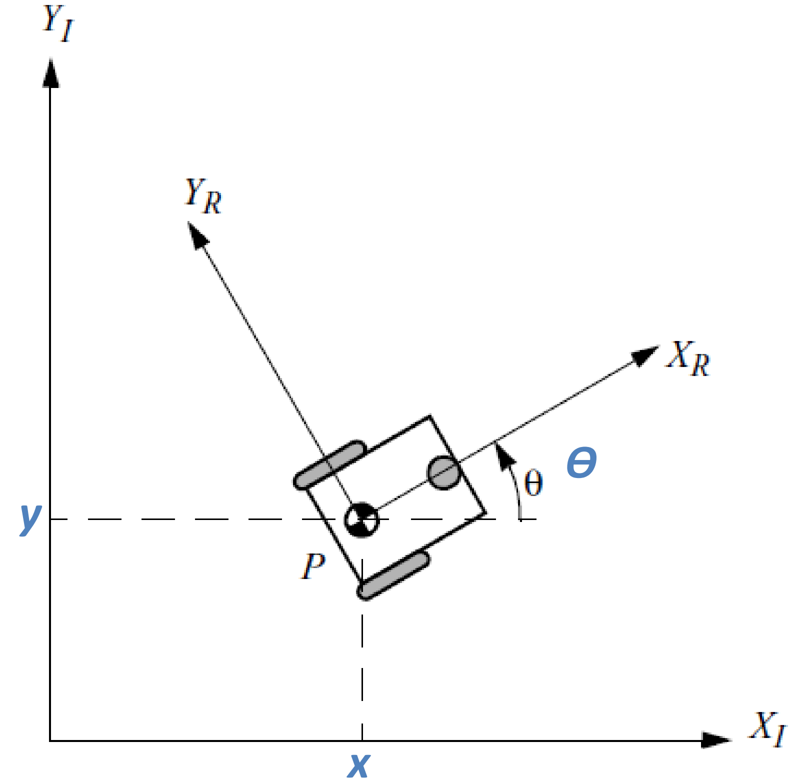
- **Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota**

- **Globalni koordinatni sistem (proizvoljno izabran) sa početkom u tački O:**

$$\{X_I, Y_I\}$$

- **Lokalni koordinatni sistem AMR fiksan u odnosu na proizvoljno izabranu tačku robota P:**

$$\{X_R, Y_R\}$$



- **Relativni položaj dva 2-D koordinatna sistema u istoj ravni je određen pomoću 3 parametra:**
  - ***x*** – položaj tačke P na X_I osi
  - ***y*** – položaj tačke P na Y_I osi
  - ***Θ*** – ugao rotacije između dva koordinatna sistema

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Opšti model kinematike AMR

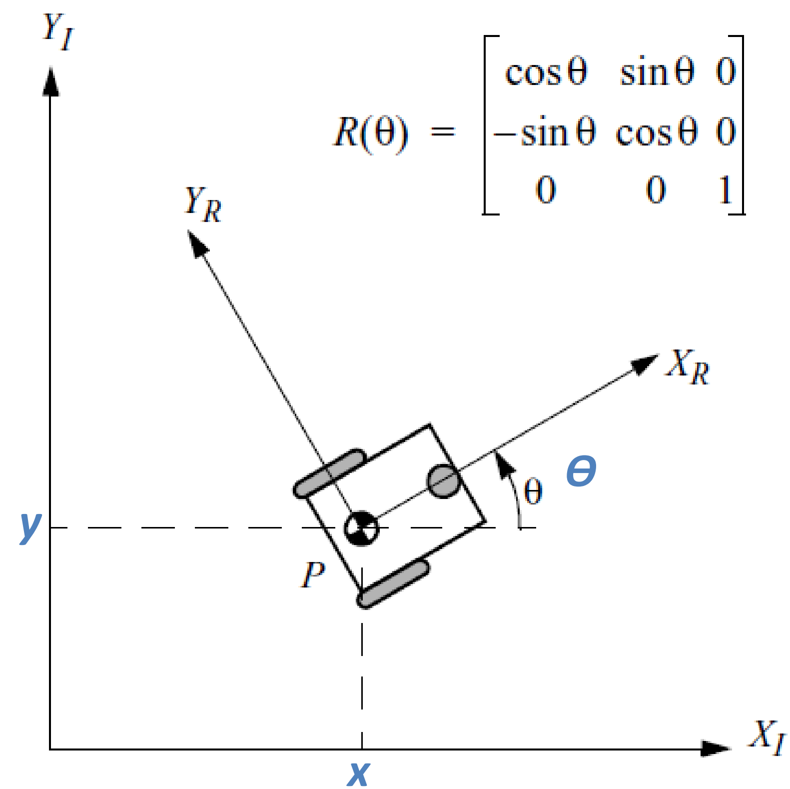
- **Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota**

- **Globalni koordinatni sistem (proizvoljno izabran) sa početkom u tački O:**

$$\{X_I, Y_I\}$$

- **Lokalni koordinatni sistem AMR fiksan u odnosu na proizvoljno izabranu tačku robota P:**

$$\{X_R, Y_R\}$$



- **Relativni položaj dva 2-D koordinatna sistema u istoj ravni je određen pomoću 3 parametra:**
  - ***x*** – položaj tačke P na X_I osi
  - ***y*** – položaj tačke P na Y_I osi
  - ***θ*** – ugao rotacije između dva koordinatna sistema

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$ ➡ mapiranje kretanja iz globalnog u lokalni koor. sistem: $\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I$

Opšti model kinematike AMR

- **Faza 1: kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu u zavisnosti od parametara kojim se opisuje kretanje u lokalnom koordinatnom sistemu robota**

- **Globalni koordinatni sistem (proizvoljno izabran) sa početkom u tački O:**

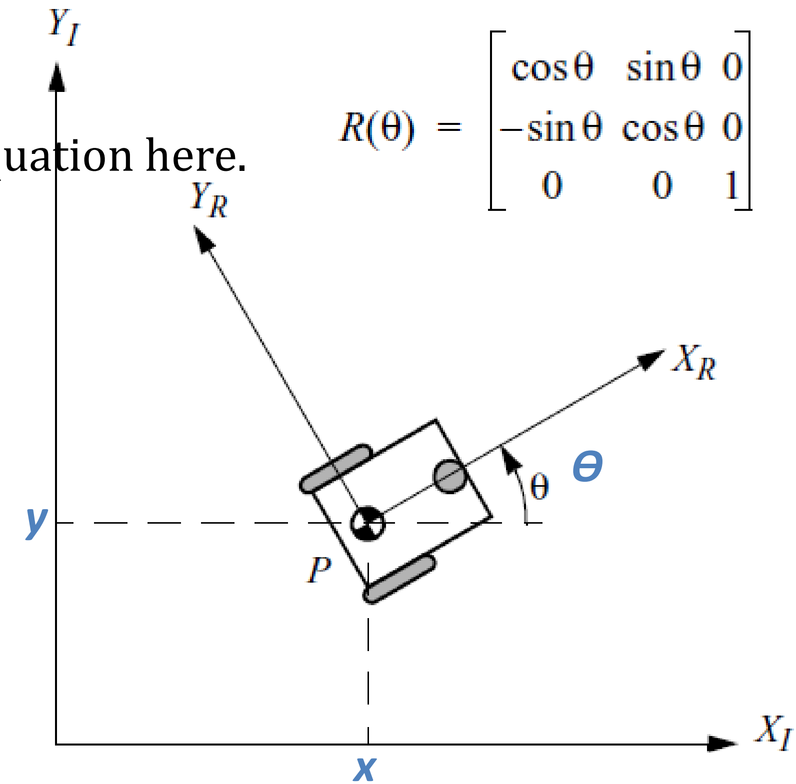
$$\{X_I, Y_I\}$$

- **Lokalni koordinatni sistem AMR fiksan u odnosu na proizvoljno izabranu tačku robota P:**

Type equation here.

$$\{X_R, Y_R\}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- **Relativni položaj dva 2-D koordinatna sistema u istoj ravni je određen pomoću 3 parametra:**
  - ***x*** – položaj tačke P na X_I osi
  - ***y*** – položaj tačke P na Y_I osi
  - ***Θ*** – ugao rotacije između dva koordinatna sistema

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

mapiranje kretanja iz globalnog u lokalni koor. sistem: $\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I$

mapiranje kretanja iz lokalnog u globalni koor. sistem: $\dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1}\dot{\xi}_R$

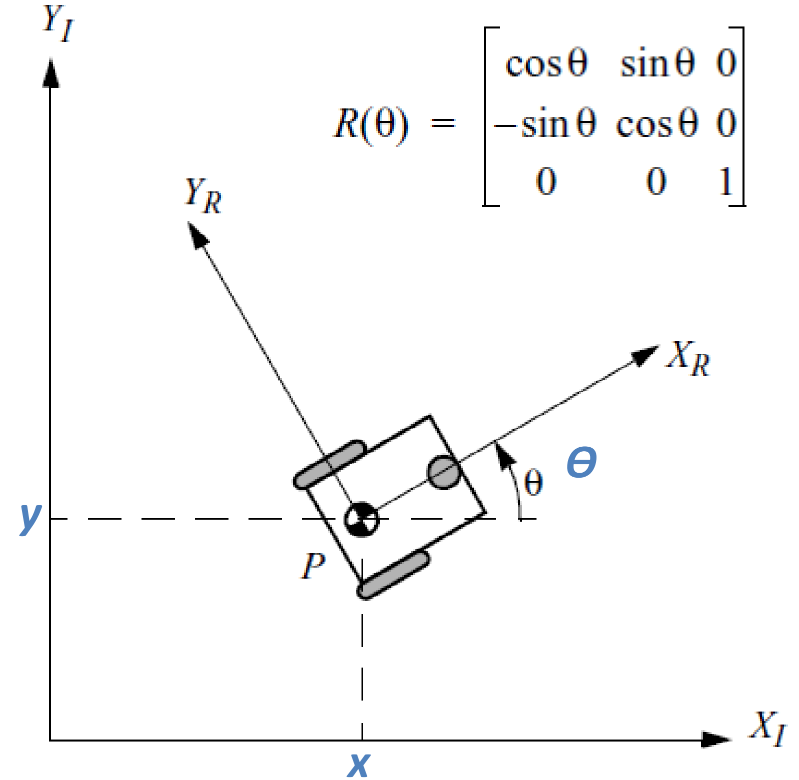
Opšti model kinematike AMR

- **Primer: napisati direktni model kinematike robota sa diferencijalnim pogonom koji pokazuje kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu ako su:**
  - brzine levog i desnog točka robota - $\dot{\varphi}_L, \dot{\varphi}_R$
  - poluprečnici točkova - r
  - rastojanje između točkova - l

$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1}\dot{\xi}_R = f(l, r, \theta, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

?

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



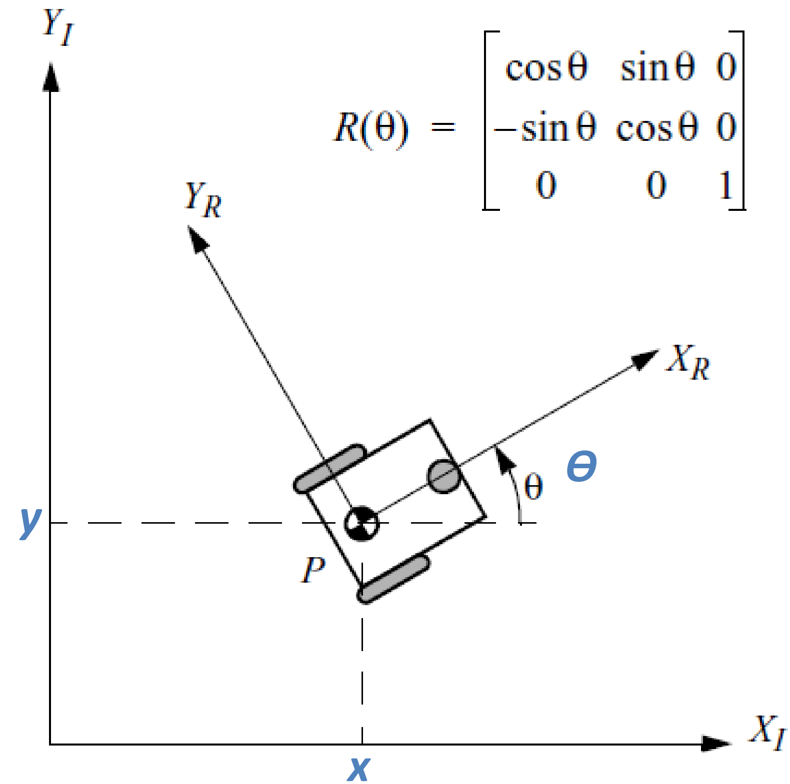
Opšti model kinematike AMR

- **Primer: napisati direktni model kinematike robota sa diferencijalnim pogonom koji pokazuje kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu ako su:**
  - brzine levog i desnog točka robota - $\dot{\varphi}_L, \dot{\varphi}_R$
  - poluprečnici točkova - *r*
  - rastojanje između točkova - *l*

$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1}\dot{\xi}_R = f(l, r, \theta, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

?

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Pitanje: Zašto ne biramo veće točkove kada se povećanjem poluprečnika povećavaju performanse!?

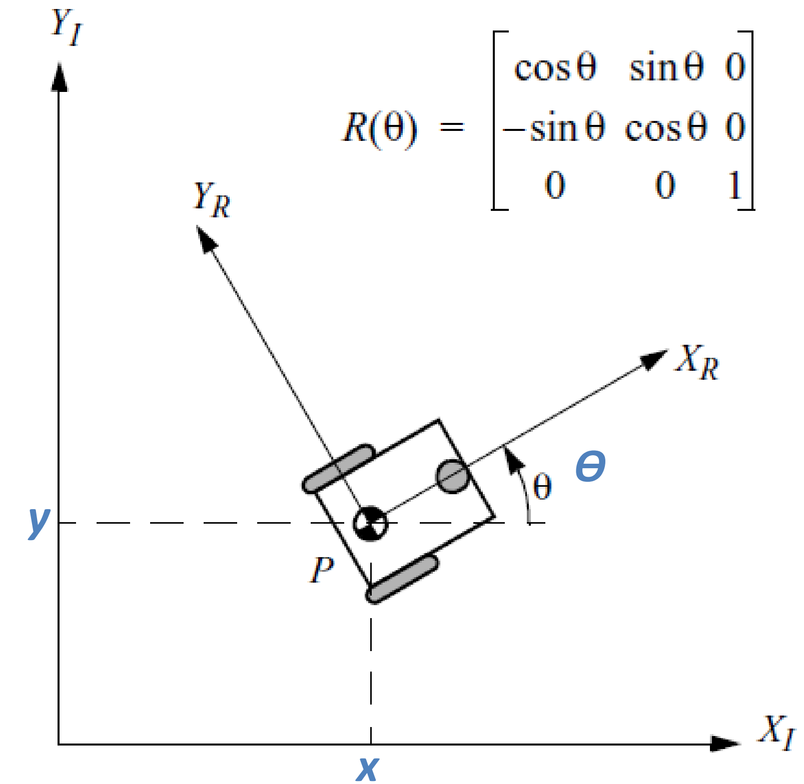
Opšti model kinematike AMR

- **Primer: napisati direktni model kinematike robota sa diferencijalnim pogonom koji pokazuje kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu ako su:**
  - brzine levog i desnog točka robota - $\dot{\varphi}_L, \dot{\varphi}_R$
  - poluprečnici točkova - *r*
  - rastojanje između točkova - *l*

$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1}\dot{\xi}_R = f(l, r, \theta, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

?

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

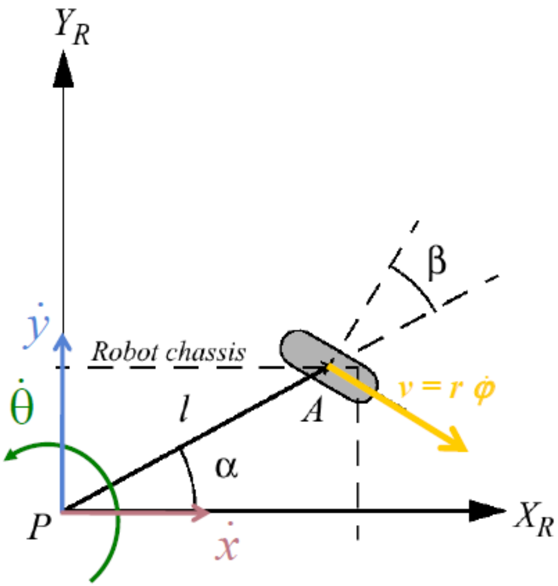


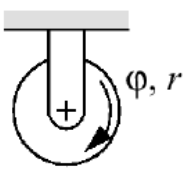
Pitanje: Zašto ne biramo veće točkove kada se povećanjem poluprečnika povećavaju performanse!?

Odgovor: Potrebni veći obrtni momenti, odnosno redukcija u pogonskom prenosu!

Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Klasičan točak**

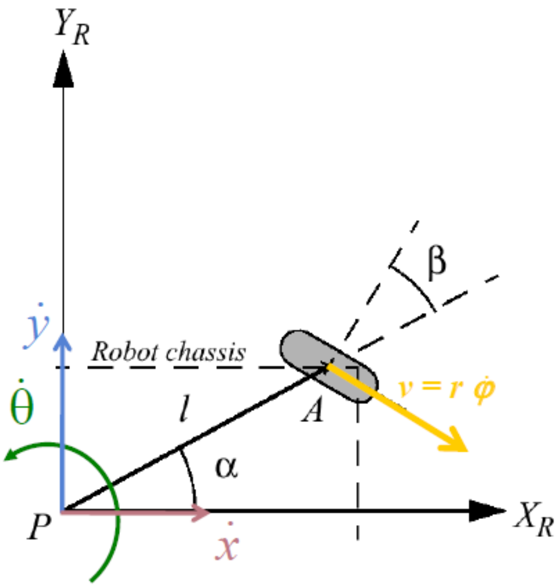


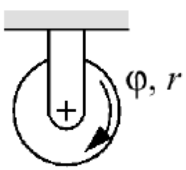


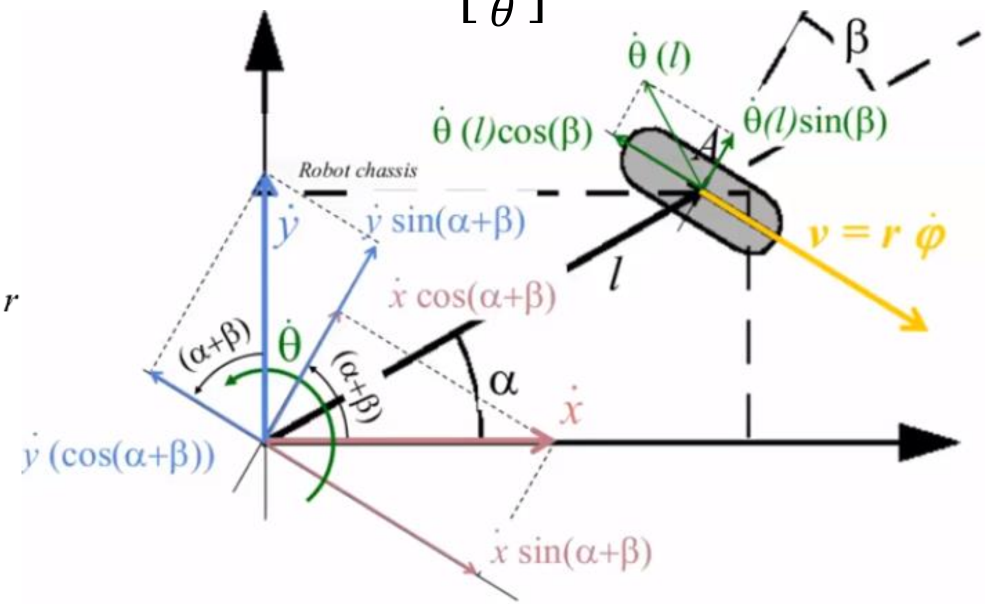
Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Klasičan točak**

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \theta \end{bmatrix}$$



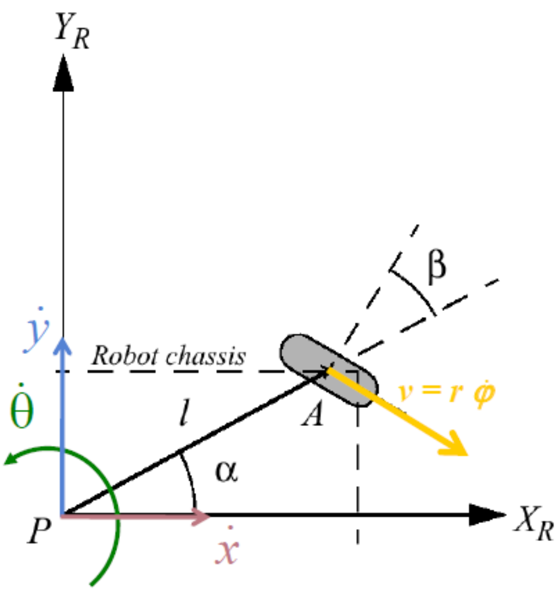


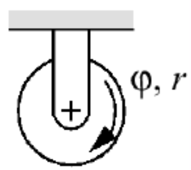


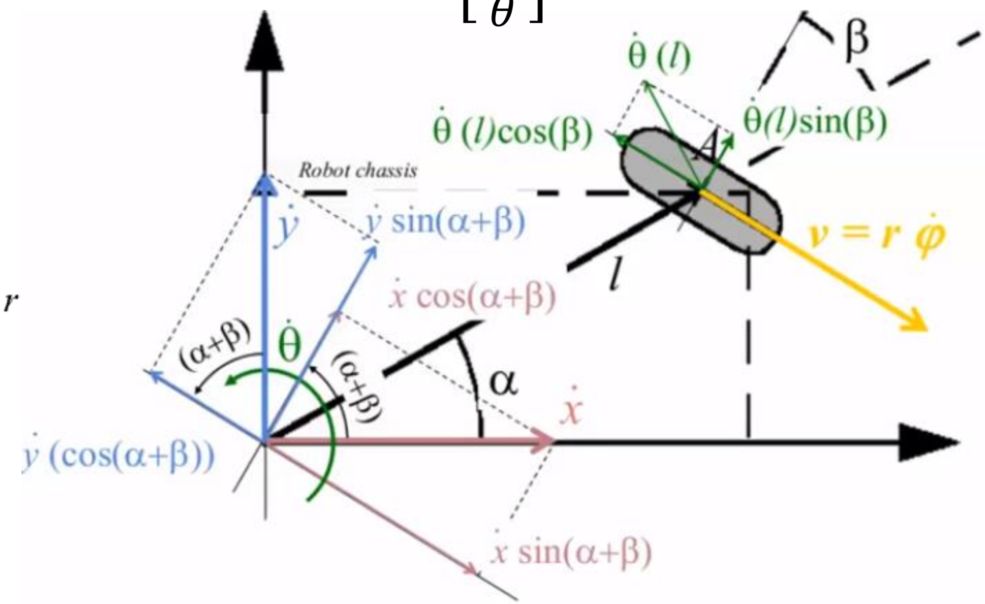
Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Klasičan točak**

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \theta \end{bmatrix}$$







- **Ograničenje 1: brzina kotrljanja točka (eng. *rolling constraint*)**

$$[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos(\beta)]\dot{\xi}_R = r\,\dot{\varphi}$$

- **Ograničenje 2: nema kretanja duž ose rotacije točka (eng. *sliding constraint*)**

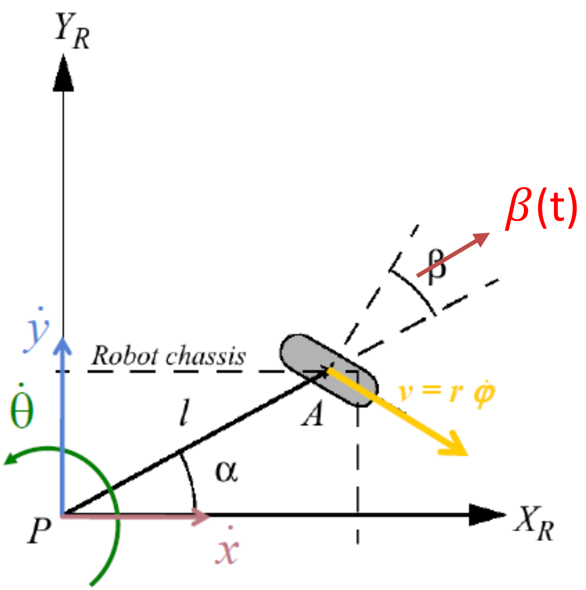
$$[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad l\sin(\beta)]\dot{\xi}_R = 0$$

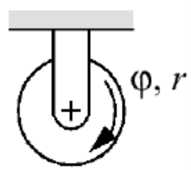
Kinematika točkova i ograničenja

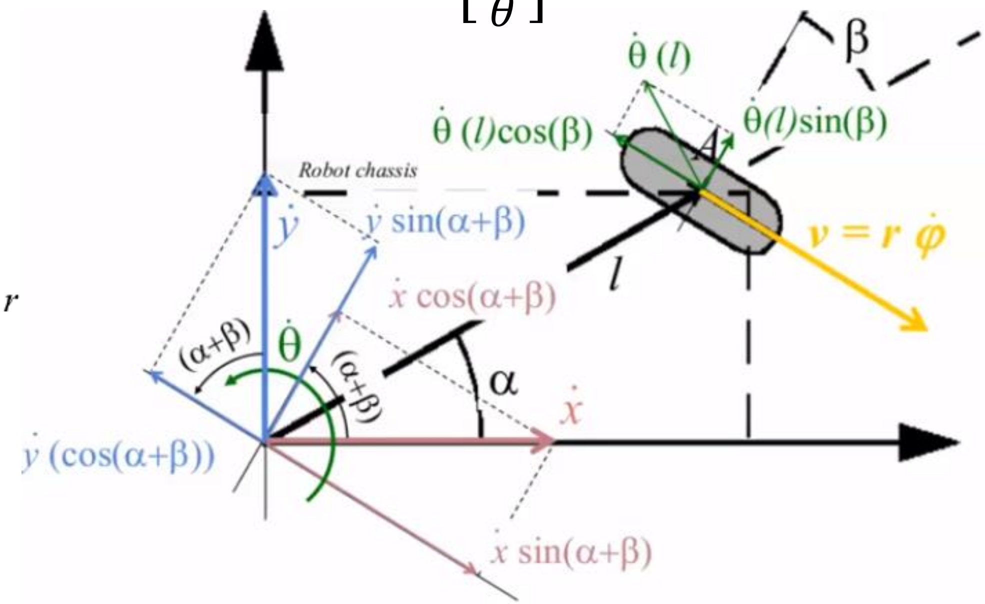
➢ **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**

➢ **Klasičan točak sa zakretanjem (osa rotacije ≡ tačka kontakta)**

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \theta \end{bmatrix}$$



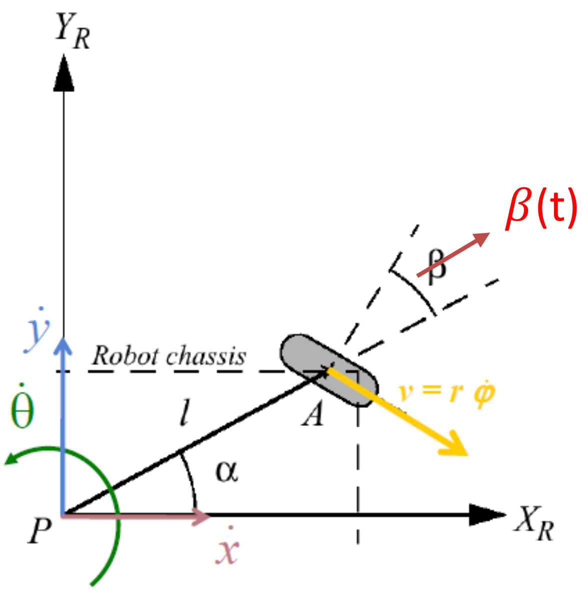


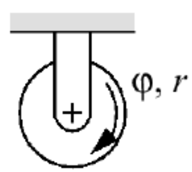


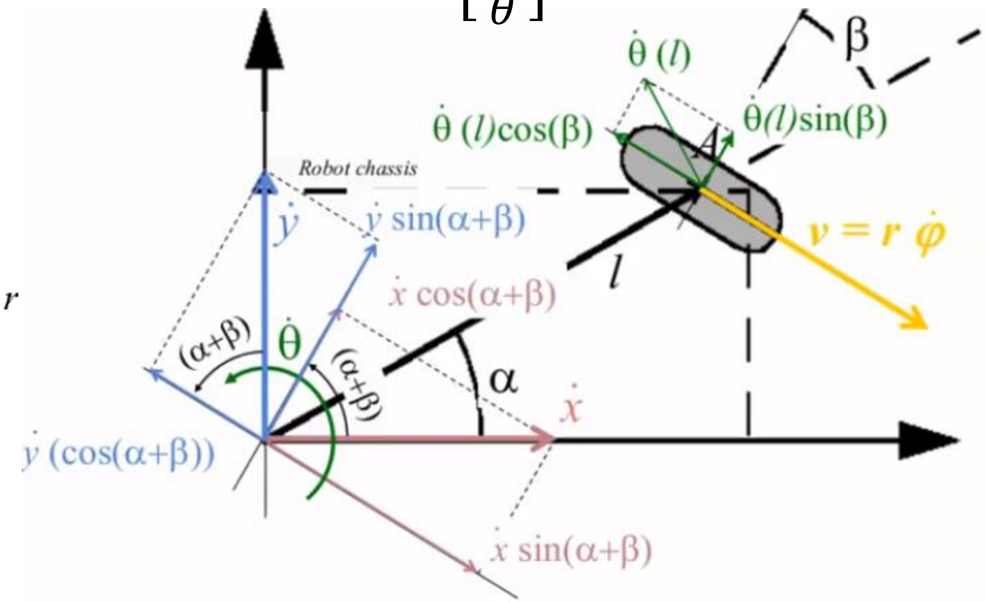
Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Klasičan točak sa zakretanjem (osa rotacije ≡ tačka kontakta)**

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \theta \end{bmatrix}$$







- **Ograničenje 1: brzina kotrljanja točka (eng. *rolling constraint*)**

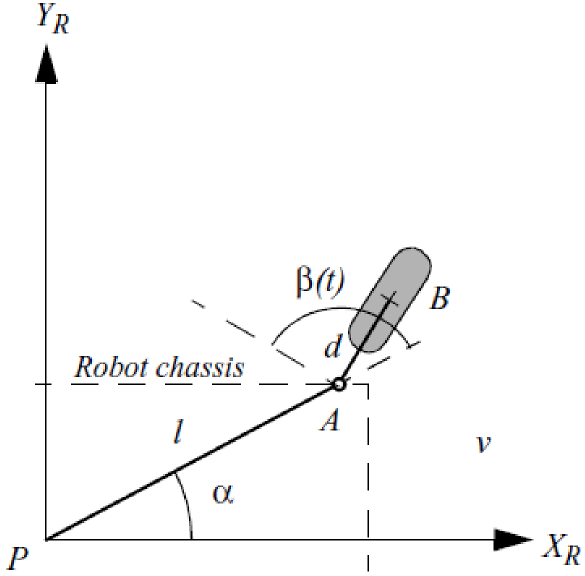
$$[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos(\beta)]\dot{\xi}_R = r\,\dot{\varphi}$$

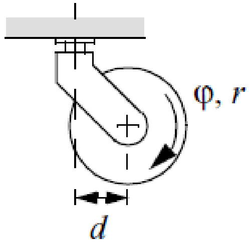
- **Ograničenje 2: nema kretanja duž ose rotacije točka (eng. *sliding constraint*)**

$$[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad l\sin(\beta)]\dot{\xi}_R = 0$$

Kinematika točkova i ograničenja

- Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?
- Kastor točak (osa zakretanja (A) ≠ tačka kontakta (B) – offset d)

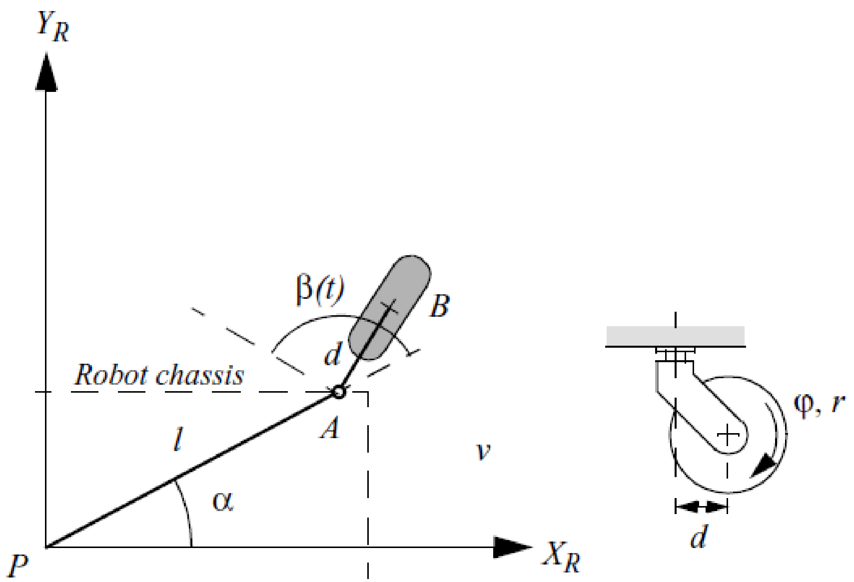




- osa zakretanja kastor točka (A) je i dalje fiksna u odnosu na šasiju robota odnosno lokalni koor. sistem
- pretpostavka da je offset AB uvek u ravni točka
- kao kod klasičnog točka sa zakretanjem – dve upravljačke veličine - *$\beta(t)$ i $\varphi(t)$*

Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Kastor točak (osa zakretanja (A) ≠ tačka kontakta (B) – offset d)**



- **osa zakretanja kastor točka (A) je i dalje fiksna u odnosu na šasiju robota odnosno lokalni koor. sistem**
- **pretpostavka da je offset AB uvek u ravni točka**
- **kao kod klasičnog točka sa zakretanjem – dve upravljačke veličine - *β(t) i φ(t)***

- **Ograničenje 1: brzina kotrljanja točka (eng. *rolling constraint*)**

$$[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos(\beta)]\dot{\xi}_R = r\,\dot{\varphi}$$

offset ne utiče na kretanje duž pravca kretanja točka

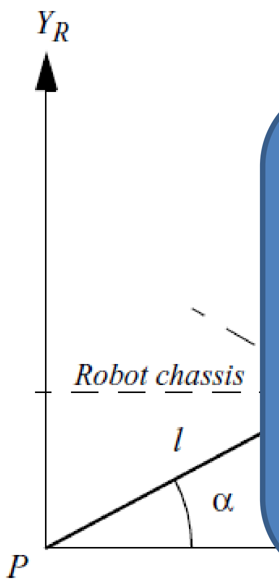
- **Ograničenje 2: nema kretanja duž ose rotacije točka (eng. *sliding constraint*)**

$$[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d + l\sin(\beta)]\dot{\xi}_R = -d\,\dot{\beta}$$

zakretanjem kastora pomera se robot (ne kod klasičnog)

Kinematika točkova i ograničenja

- **Pitanje: kako kretanje pojedinog točka na šasiji doprinosi/ograničava kretanje AMR?**
- **Kastor točak (osa zakretanja (A) ≠ tačka kontakta (B) – offset d)**



lje fiksna u
ni koor.
ni točka
– dve

- **Zaključak: za proizvoljno kretanje šasije u prostoru $\dot{\xi}_L$ mogu se izračunati**

brzine okretanja $\dot{\varphi}$ i skretanja točka $\dot{\beta}$ koje ga mogu realizovati!

OMNIDIREKCIONI SISTEM
(sistemi sa švedskim točkovima ili sfernim su takođe omnidirekcioni – ne uvode ograničenja u kretanje)

- **Ograničenje 1: brzina kotrljanja točka (eng. *rolling constraint*)**

$$[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos(\beta)]\dot{\xi}_R = r\,\dot{\varphi}$$

offset ne utiče na kretanje duž pravca kretanja točka

- **Ograničenje 2: nema kretanja duž ose rotacije točka (eng. *sliding constraint*)**

$$[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d + l\sin(\beta)]\dot{\xi}_R = -d\,\dot{\beta}$$

zakretanjem kastora pomera se robot (ne kod klasičnog)

Kinematika točkova i ograničenja

- **Ograničenje kretanja AMR u opštem slučaju (sa M točkova):**

Svaki pojedinačni (klasični – sa ili bez zakretanja) točak unosi njemu pripadajuća ograničenja na šasiju!

Ograničenje 1 (*rolling constraint*):

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1+\beta_1) & -\cos(\alpha_1+\beta_1) & -l_1\cos(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2+\beta_2) & -\cos(\alpha_2+\beta_2) & -l_2\cos(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(\alpha_M+\beta_M) & -\cos(\alpha_M+\beta_M) & -l_M\cos(\beta_M) \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_M \end{bmatrix}$$

$$J_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R - J_{2_{MxM}}\dot{\varphi} = 0$$

Kinematika točkova i ograničenja

- **Ograničenje kretanja AMR u opštem slučaju (sa M točkova):**

Svaki pojedinačni (klasični – sa ili bez zakretanja) točak unosi njemu pripadajuća ograničenja na šasiju!

Ograničenje 1 (*rolling constraint*):

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1+\beta_1) & -\cos(\alpha_1+\beta_1) & -l_1\cos(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2+\beta_2) & -\cos(\alpha_2+\beta_2) & -l_2\cos(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(\alpha_M+\beta_M) & -\cos(\alpha_M+\beta_M) & -l_M\cos(\beta_M) \end{bmatrix}\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_M \end{bmatrix}$$

$$J_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R - J_{2_{MxM}}\dot{\varphi} = 0$$

Ograničenje 2 (*sliding constraint*):

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1+\beta_1) & \sin(\alpha_1+\beta_1) & l_1\sin(\beta_1) \\ \cos(\alpha_2+\beta_2) & \sin(\alpha_2+\beta_2) & l_2\sin(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_M+\beta_M) & \sin(\alpha_M+\beta_M) & l_M\sin(\beta_M) \end{bmatrix}\dot{\xi}_R = 0\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_M \end{bmatrix}$$

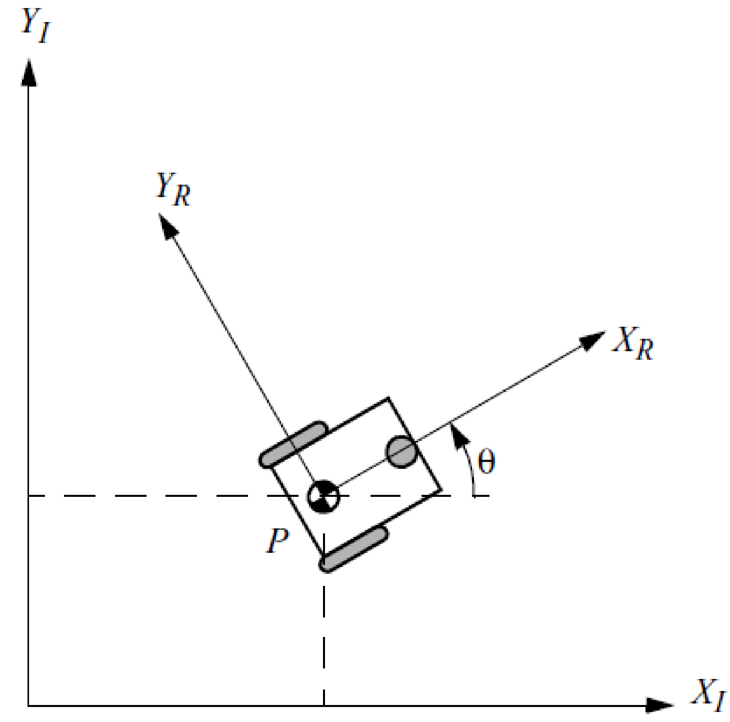
$$C_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R = 0$$

Kinematika točkova i ograničenja

- **Ograničenje kretanja AMR u opštem slučaju (sa M točkova):**

- **Primer: napisati direktni model kinematike robota sa diferencijalnim pogonom koji pokazuje kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu ako su:**
  - brzine levog i desnog točka robota - $\dot{\varphi}_L$, $\dot{\varphi}_R$
  - poluprečnici točkova - *r*
  - rastojanje između točkova - *l*

?



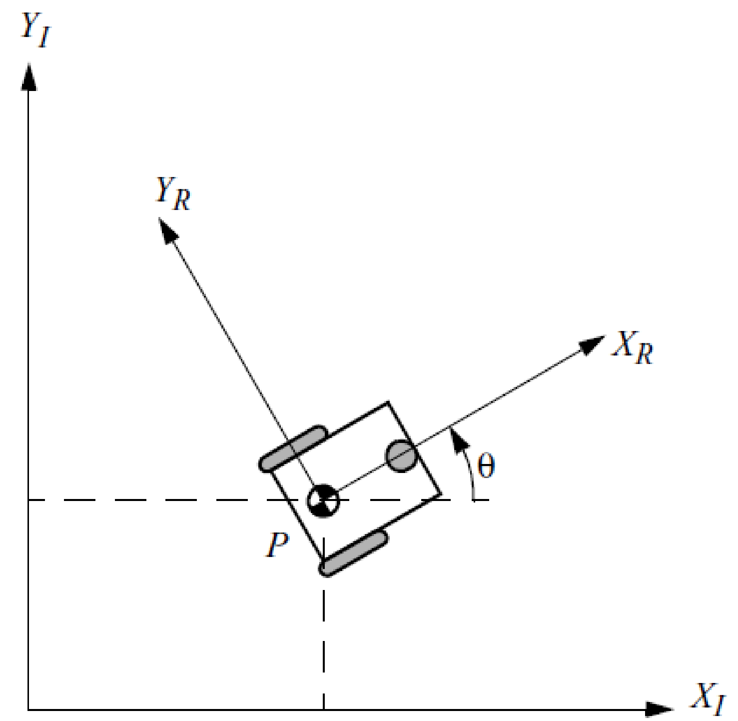
Kinematika točkova i ograničenja

- **Ograničenje kretanja AMR u opštem slučaju (sa M točkova):**

- **Primer: napisati direktni model kinematike robota sa diferencijalnim pogonom koji pokazuje kretanje robota u globalnom koordinatnom sistemu ako su:**
  - brzine levog i desnog točka robota - $\dot{\varphi}_L$, $\dot{\varphi}_R$
  - poluprečnici točkova - *r*
  - rastojanje između točkova - *l*

?

Uglovi: $\alpha_L = \frac{\pi}{2}; \beta_L = \mathbf{0}; \alpha_R = -\frac{\pi}{2}; \beta_R = -\boldsymbol{\pi}$



Mobile industrial robot

- Kinematski modeli – kinematika mobilnog robotskog manipulatora

Manevrabilnost AMR

- **Manevrabilnosti: mobilnost + zakretljivost točkova**

- **mobilnost (eng. *Mobility*):** mogućnost AMR da se slobodno kreće u okruženju što je određeno ograničenjima (konkretno *sliding constraint*) svakog točka na šasiji automobila.

- **zakretljivost (eng. *Steerability*) točkova:** u zavisnosti od zakretanja točkova pravac ograničenja se menja.

- **Podsetnik:**

- *Sliding constraint* postoji kod klasičnog točka i klasičnog točka sa zakretanjem (ostale vrste točkova ne uvode ograničenja)!

- Klasičan točak za zakretanjem utiče na manevrabilnost svojim dodatnim stepenom slobode zakretanja!

Manevrabilnost AMR

- **Manevrabilnosti: mobilnost + zakretljivost točkova**

- **mobilnost (eng. *Mobility*):** mogućnost AMR da se slobodno kreće u okruženju što je određeno ograničenjima (konkretno *sliding constraint*) svakog točka na šasiji automobila.

- **zakretljivost (eng. *Steerability*) točkova:** u zavisnosti od zakretanja točkova pravac ograničenja se menja.

- **Podsetnik:**

  - *Sliding constraint* postoji kod klasičnog točka i klasičnog točka sa zakretanjem (ostale vrste točkova ne uvode ograničenja)!
  - Klasičan točak za zakretanjem popravlja manevrabilnost svojim dodatnim stepenom slobode zakretanja!

- **Kvantitativna mera manevrabilnosti, mobilnosti, zakretljivosti**

  - Stepen manevrabilnosti - δ_M
  - Stepen mobilnosti - δ_m
  - Stepen zakretljivosti - δ_s
  - $\delta_M = \delta_m + \delta_s$

Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

- *sliding constraint* – ne postoji bočno klizanje u odnosu na ravan točka:

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R = 0 \;\;\rightarrow\;\; C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0$$

- Neka je od ***M*** točkova koji unose ograničenja ukupno ***f*** klasičnih i ***s*** klasičnih sa mogućnošću zakretanja (*M = f + s*).

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \;\;\rightarrow\;\; \begin{matrix} C_{1_f}R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \\ C_{1_s}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \end{matrix}; \;\; C_{1_M}(\beta) = \begin{bmatrix} C_{1_f} \\ C_{1_s}(\beta) \end{bmatrix}$$

- **Šta to znači!?**

Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

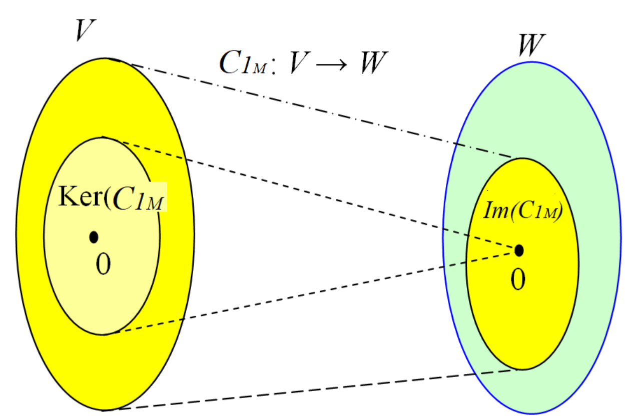
- *sliding constraint* – ne postoji bočno klizanje u odnosu na ravan točka:

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R = 0 \;\; \rightarrow \;\; C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0$$

- Neka je od ***M*** točkova koji unose ograničenja ukupno ***f*** klasičnih i ***s*** klasičnih sa mogućnošću zakretanja (*M = f + s*).

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \;\; \rightarrow \;\; \begin{matrix} C_{1_f}R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \\ C_{1_s}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \end{matrix}; \;\; C_{1_M}(\beta) = \begin{bmatrix} C_{1_f} \\ C_{1_s}(\beta) \end{bmatrix}$$

- **Šta to znači!?**
  - Matematički: vektor kretanja $R(\theta)\dot{\xi}_L = \dot{\xi}_R$ mora pripadati nultom prostoru (eng. *null space* ili *kernel*) projekcije matrice $C_{1_M}(\beta)$
  - Nulti prostor preslikavanja $C_{1_M}(\beta)$ je prostor *N* takav da se svaki vektor *n* iz tog prostora preslikava u istu tačku: $C_{1_M}(\beta)n = 0$



Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

- *sliding constraint* – ne postoji bočno klizanje u odnosu na ravan točka:

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R = 0 \;\rightarrow\; C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0$$

- Neka je od ***M*** točkova koji unose ograničenja ukupno ***f*** klasičnih i ***s*** klasičnih sa mogućnošću zakretanja (*M = f + s*).

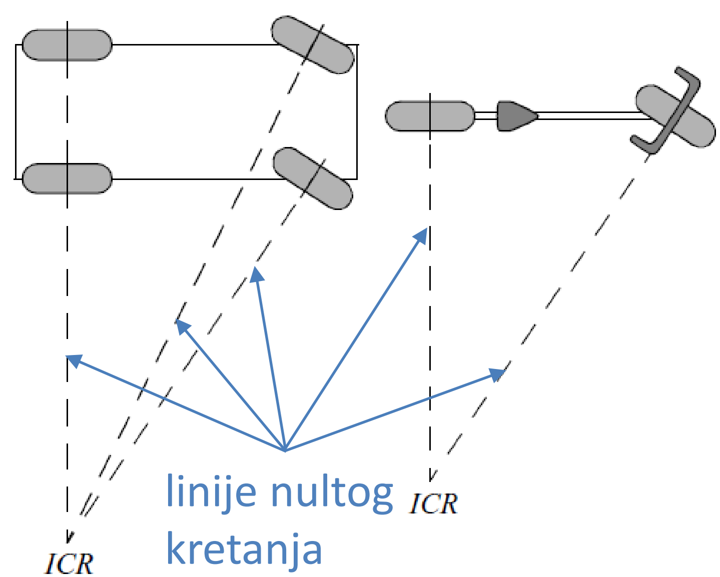
$$C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \;\rightarrow\; \begin{matrix} C_{1_f}R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \\ C_{1_s}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0 \end{matrix};\; C_{1_M}(\beta) = \begin{bmatrix} C_{1_f} \\ C_{1_s}(\beta) \end{bmatrix}$$

- **Šta to znači!?**

- Geometrijski: konceptom trenutnog centra rotacije (eng. *instantenous center of rotation - ICR*)

  Kako ne postoji kretanje normalno na ravan točkova možemo nacrtati tačke nultog kretanja (eng. *zero motion lines*) odnosno robot se u svakom trenutku mora kretati po krugu poluprečnika *R* čiji se centar nalazi na ZML svakog točka → ICR

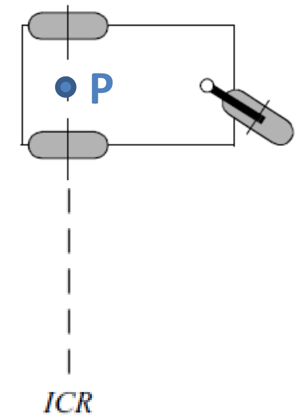
  * pravolinijsko kretanje - $R \rightarrow \infty$



Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

$\{(l_1 = l_2), (\beta_1 = \beta_2 = 0), (\alpha_1 + \pi = \alpha_2)\}$

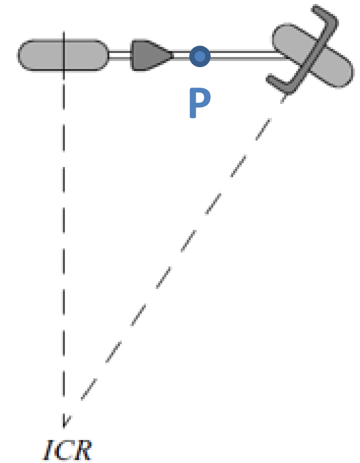


- Poređenje AMR sa diferencijlanim pogonom i bicikl pogonom

$$C_{1_{Mx3}}(\beta)\dot{\xi}_R = 0 \;\rightarrow\; C_{1_{Mx3}}(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_L = 0$$

- Geometrijski (položaj ZML/ICR):
  - AMR sa diferencijalnim pogonom: ICR proizvoljno duž ZML
  - AMR sa bicikl pogonom: ICR jednoznačno određen ZML klasičnog i točka za skretanje

$\{(l_1 = l_2), (\beta_1 = \beta_2 = \pi/2), (\alpha_1 = 0), (\alpha_2 = \pi)\}$



- Matematički (rang matrice C_{1_M} - *rank*$[C_{1_M}(\beta)]$=broj ograničenja u mobilnosti):
  - AMR sa diferencijalnim pogonom: *rank*$[C_{1_M}(\beta)]$=1

$$C_1(\beta_s) = C_{1f} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) & 0 \\ \cos(\alpha_1 + \pi) & \sin(\alpha_1 + \pi) & 0 \end{bmatrix}$$

  - AMR sa bicikl pogonom: *rank*$[C_{1_M}(\beta)]$=2

$$C_1(\beta_s) = C_{1f} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & l_1\sin(\pi/2) \\ \cos(3\pi/2) & \sin(3\pi/2) & l_1\sin(\pi/2) \end{bmatrix}$$

Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

- **Zaključci:**
  - što je veći rang matrice C_{1_M} to je kretanje više ograničeno!
  - svaki klasični (bez ili sa zakretanjem) točak na šasiji AMR unosi po jedno *sliding contraint* i doprinosi rangu matrice maksimalno za 1!
  - $0 \leq rank[C_{1_M}(\beta)] \leq 3$, $rank[C_{1_M}(\beta)]_{min} = 0$ → kretanje bez ograničenja;
    $rank[C_{1_M}(\beta)]_{max} = 3$ → kretanje ograničeno po sva tri stepena slobode u ravni

- **Definicija stepena mobilnosti (δ_m) – broj spoljašnjih stepeni slobode ravanskog kretanja šasije AMR na koji se direktno može uticati obrtanjem točkova (unutrašnjih stepeni slobode):**

$$\delta_m = 3 - rank[C_{1_M}(\beta)] \rightarrow \quad 0 \leq \delta_m \leq 3$$

- $\delta_m = 0$ – AMR sa svim ograničenim stepenima slobode – nema mogućnost kretanja
- $\delta_m = 1$ – AMR sa bicikl pogonom
- $\delta_m = 2$ – AMR sa diferencijalnim pogonom
- $\delta_m = 3$ – AMR sa omnidirekcionim točkovima

Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

- **Definicija stepena zakretljivosti (δ_s) – broj nezavisno kontrolisanih osa zakretanja na šasiji AMR**

$$\delta_s = rank[C_{1_S}(\beta)] \;\rightarrow\; 0 \le \delta_s \le 2; \qquad \boldsymbol{C_{1_M}(\beta) \rightarrow \begin{bmatrix} C_{1_f} \\ C_{1_s}(\beta) \end{bmatrix}}$$

- za razliku od stepena mobilnosti, zakretljivost raste sa porastom ranga matrice C_{1_S}
- s obzirom da C_{1_M} sadrži C_{1_S} zakretanje točkova može da poveća stepen zakretljivosti i da smanji stepen mobilnosti (ali se stepen manevrabilnosti ne menja)

- $\delta_s = 0$ – AMR nema zakretnih klasičnih točkova
- $\delta_s = 1$ – AMR ima najmanje jedan zakretni točak (npr. Akermanov pogon)
- $\delta_s = 2$ – AMR koji nema klasičnih točkove bez mogućnosti zakretanja, već samo dva klasična točka sa zakretanjem čime se ICR može pozicionirati proizvoljno u ravni

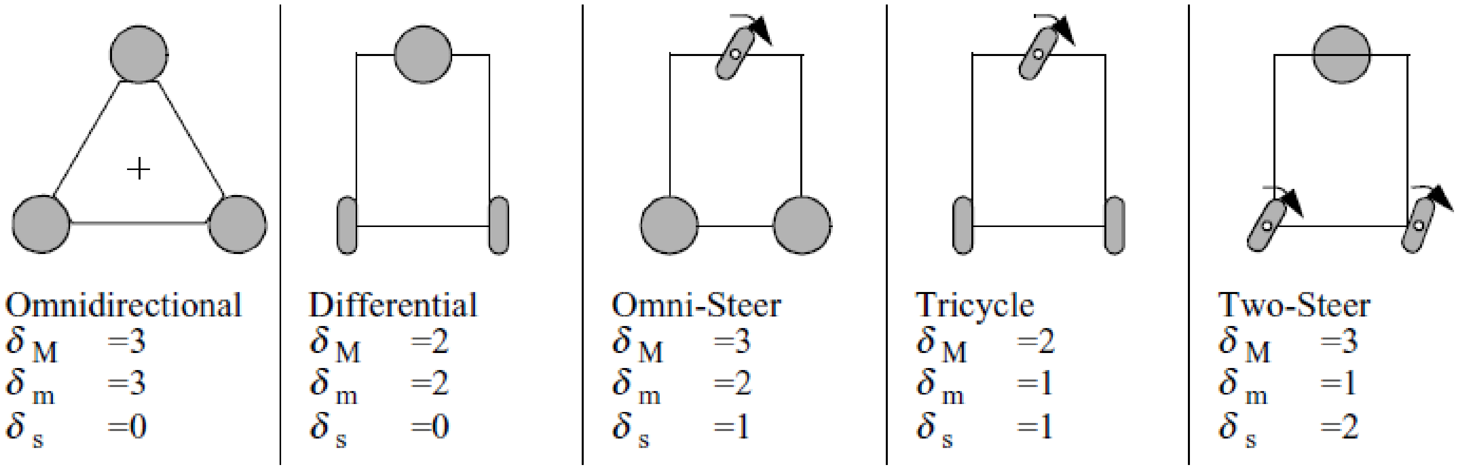
Manevrabilnost AMR

- **Mobilnost AMR**

- **Definicija stepena manevrabilnosti (δ_M) – ukupan broj stepeni slobode kojima AMR može da manipuliše**

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s \rightarrow \quad 0 \leq \delta_M \leq 3;$$

- Tipične konfiguracije AMR sa tri točka:

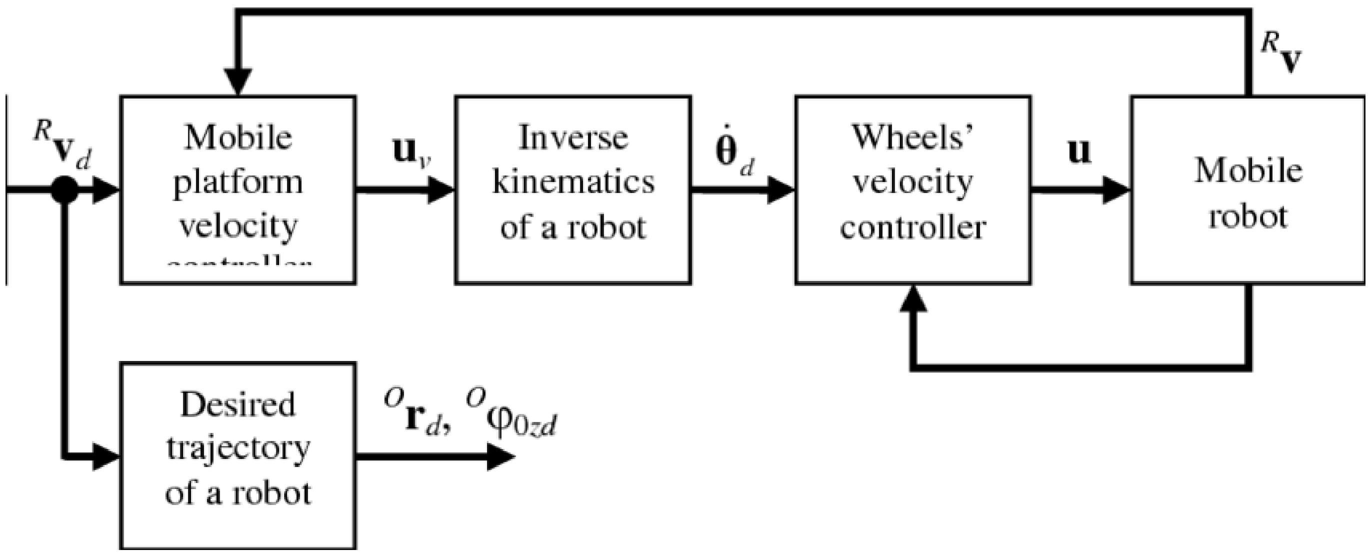


- $\delta_M = 0$ – AMR nema upravljivih stepeni slobode
- $\delta_M = 1$ – AMR ima fiksnu tačku ICR
- $\delta_M = 2$ – AMR ima ICR na liniji
- $\delta_M = 3$ – AMR može imati ICR na proizvoljnoj tački u ravni

Kontrola kretanja AMR

- **Zadatak:** AMR prati trajektoriju u ravni koja je opisana promenom pozicije/brzine u vremenu
- **Izazov:** AMR su najčešće neholonomni sistemi sa više ulaza i više izlaza (MIMO)
- **Zanemarenja:** najčešće se dimanika AMR zanemaruje

- Dve osnovne vrste pristupa: **feedforward** (open loop control) i **feedback** (closed loop control)



Kontrola kretanja AMR

- **Feedforward (Open Loop Control)**

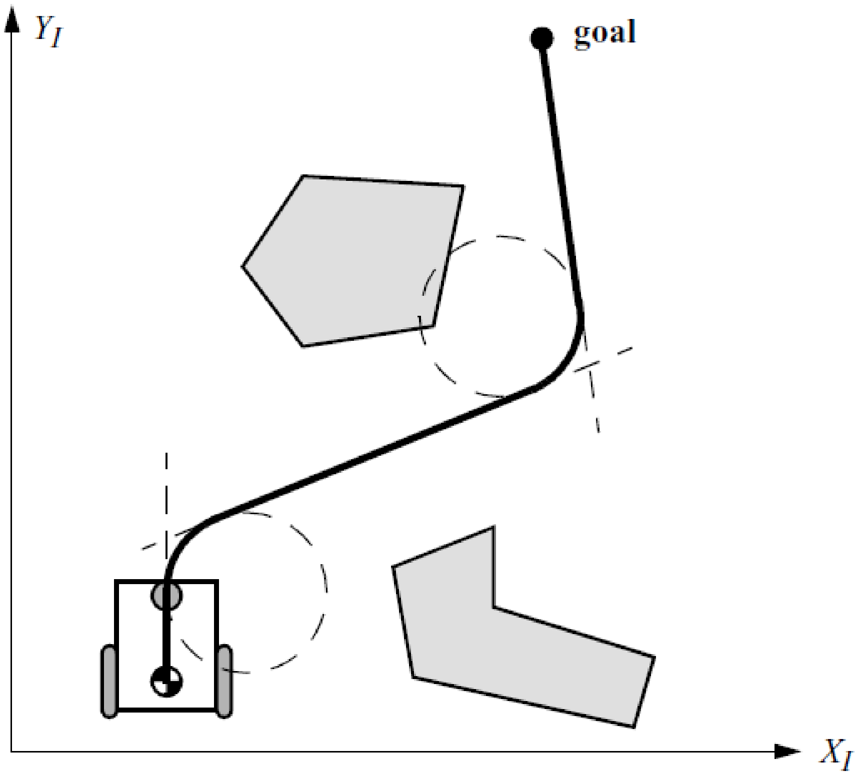
  - generisati glatku tajektoriju (ostvarivu) od starta do cilja
  - trajktoriju podeliti na pravolinijske i kružne segmente (lakše ostvarive za kinematsku konfiguraciju AMR)

- **Prednosti:**

  - jednostavno
  - nema senzora

- **Nedostaci:**

  - generisanje ostvarive trajektorije (ograničenja brzine, ubrzanja točkova)
  - u slučaju greške u kretanju usled neodgovarajućih trajektorija ne postoji mogućnost korekcije (greška se akumulira)
  - u slučaju promene konfiguracije okruženja ne postoji mogućnost reakcije – prilagođenja



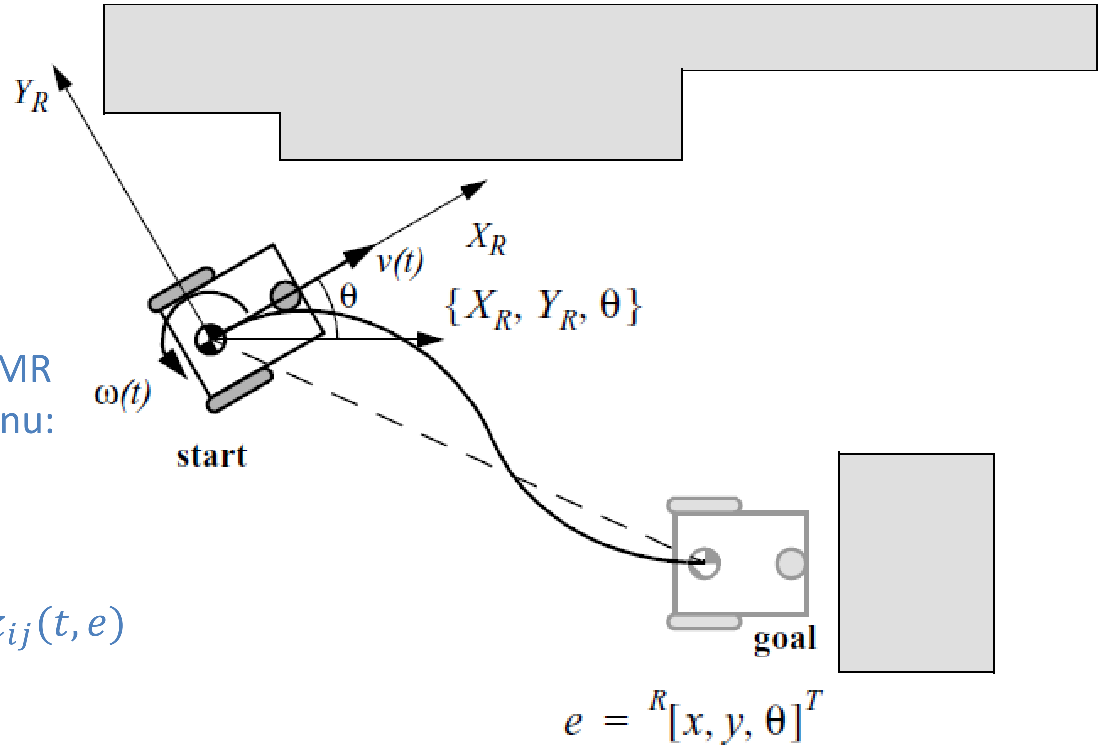
Kontrola kretanja AMR

- **Feedback (Closed Loop Control)**

- kontroler koji koriguje planiranu trajektoriju
- kontroler koji kontroliše da ostvareno kretanje robota odgovara zadatoj trajektoriji

- **Postavka problema**
- x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)

- Zadatak je da se odredi kako treba da izgledaju translatorna i ugaona brzina AMR da bi se cilj postigao u konačnom vremenu:



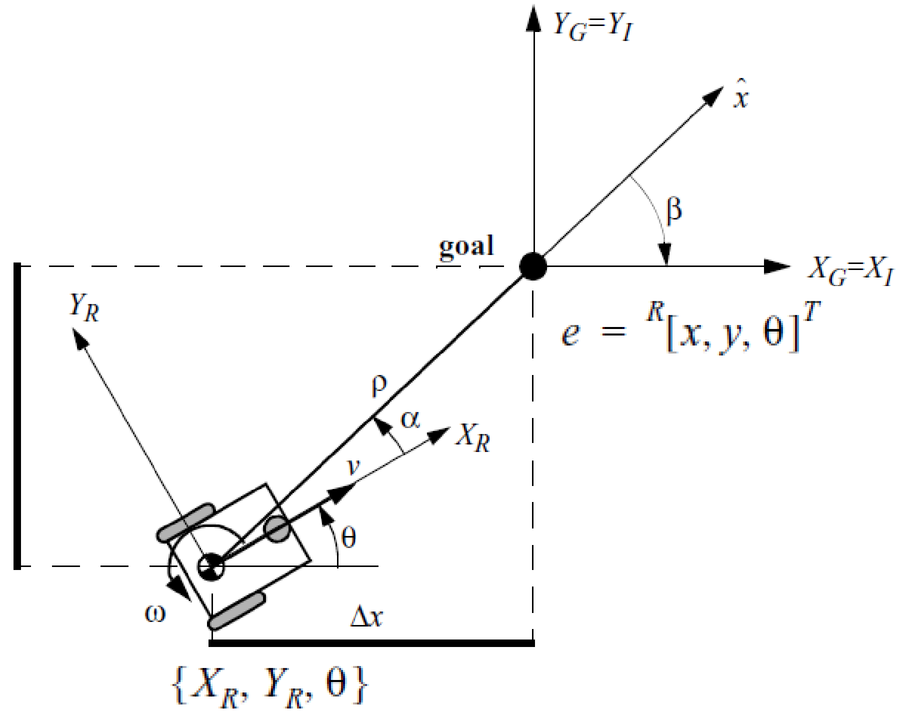
- $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} = ?$ $\quad k_{ij} = k_{ij}(t, e)$

- $\begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = K\,e = K\;{}^R\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \rightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = 0$

Kontrola kretanja AMR

- **Feedback (Closed Loop Control)**

- **Postavka problema**
  - x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)
  - pretpostaviti (b.g.o) da se globalni koordinatni sistem nalazi u cilju
  - $${}^{I}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$



- ρ – od tačke P do cilja (*goal*)
- α – ugao između X_R i potega ρ
- β – ugao između potega ρ i X_I
- θ – ugao između X_R i X_I

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

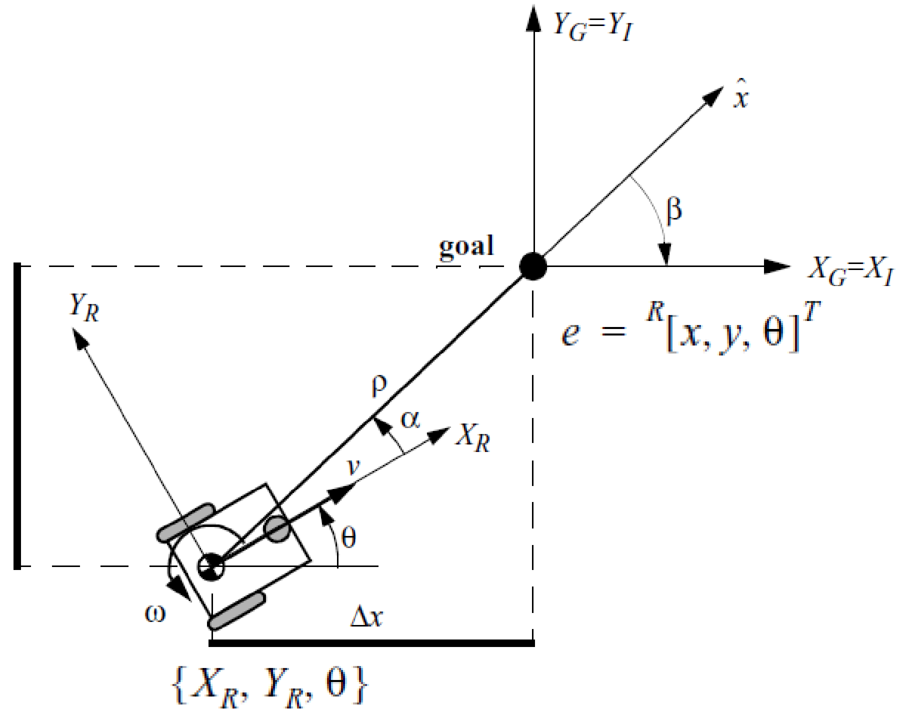
$$\alpha = -\theta + \operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x)$$

$$\beta = -\theta - \alpha$$

Kontrola kretanja AMR

- **Feedback (Closed Loop Control)**

- **Postavka problema**
  - x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)
  - pretpostaviti (b.g.o) da se globalni koordinatni sistem nalazi u cilju
  - $$^{I}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & 0\\ sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(t)\\ w(t)\end{bmatrix}$$



- Slučaj 1: robot usmeren ka cilju

  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

  $$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos\alpha & 0\\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & -1\\ -\frac{\sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$$

- ρ – od tačke P do cilja (*goal*)
- α – ugao između X_R i potega ρ
- β – ugao između potega ρ i X_I
- θ – ugao između X_R i X_I

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha = -\theta + \operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x)$$

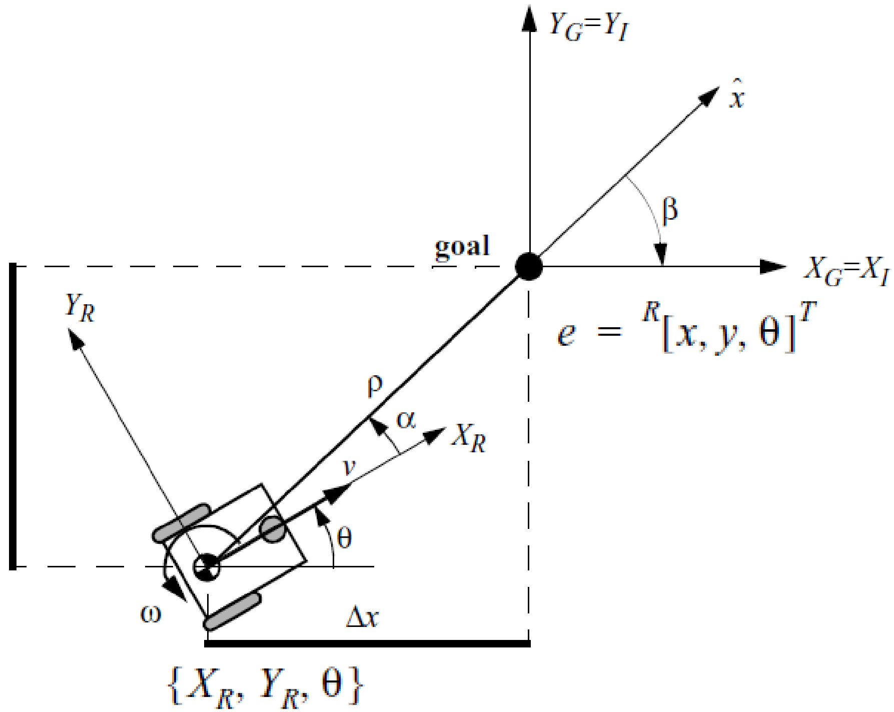
$$\beta = -\theta - \alpha$$

Kontrola kretanja AMR

➢ **Feedback (Closed Loop Control)**

➢ **Postavka problema**

- x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)
- pretpostaviti (b.g.o) da se globalni koordinatni sistem nalazi u cilju
- $${}^{I}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0\\ sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(t)\\ w(t)\end{bmatrix}$$



- Slučaj 2: robot usmeren od cilja

$\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; ($v$=-$v$)

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0\\ -\frac{\sin\alpha}{\rho} & 1\\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$$

- ρ – od tačke P do cilja (*goal*)
- α – ugao između X_R i potega ρ
- β – ugao između potega ρ i X_I
- θ – ugao između X_R i X_I

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

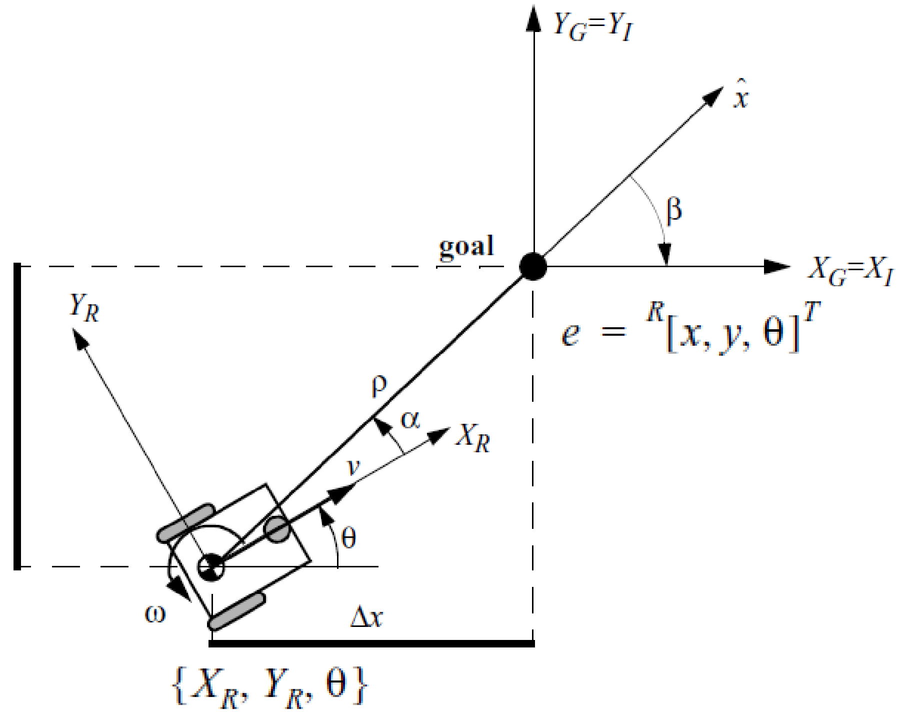
$$\alpha = -\theta + \operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x)$$

$$\beta = -\theta - \alpha$$

Kontrola kretanja AMR

- **Feedback (Closed Loop Control)**

- **Postavka problema**
  - x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)
  - pretpostaviti (b.g.o) da se globalni koordinatni sistem nalazi u cilju



- Zakon upravljanja:

$$v = k_\rho \rho$$
$$\omega = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta$$

- Zakon kretanja sistema sa zatvorenom povratnom spregom:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ -k_\rho \sin\alpha \end{bmatrix}$$

- ρ – od tačke P do cilja (*goal*)
- α – ugao između X_R i potega ρ
- β – ugao između potega ρ i X_I
- θ – ugao između X_R i X_I

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha = -\theta + \operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x)$$

$$\beta = -\theta - \alpha$$

Kontrola kretanja AMR

- **Feedback (Closed Loop Control)**

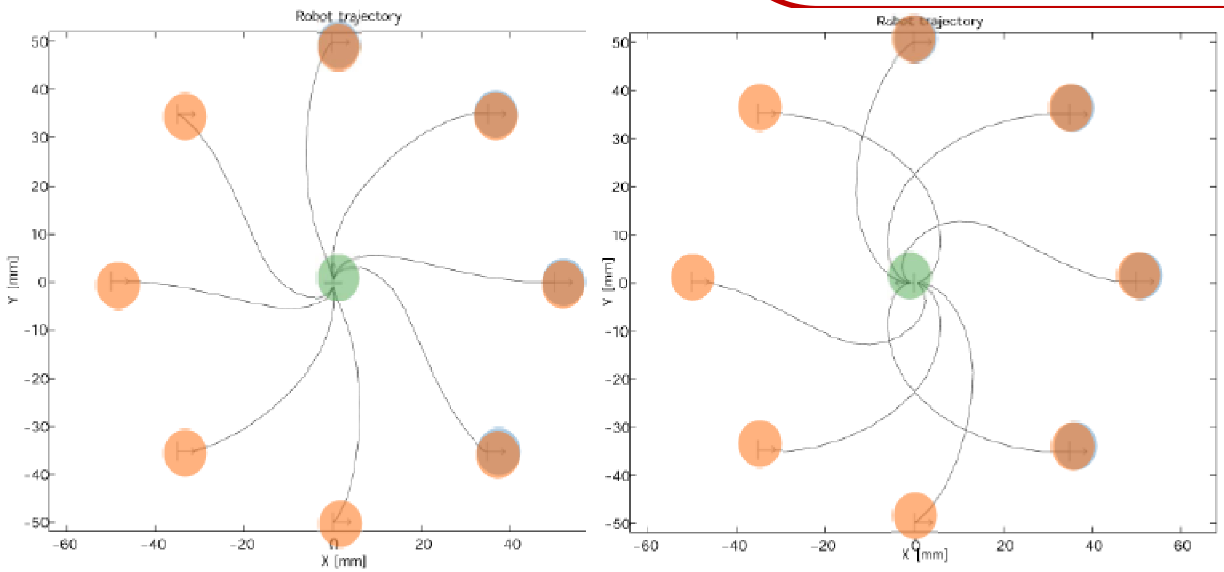
- **Postavka problema**
  - x, y, θ – koordinate cilja u lokalnom koordinatnom sistemu robota (ujedno i odstupanje od trenutne pozicije)
  - pretpostaviti (b.g.o) da se globalni koordinatni sistem nalazi u cilju

- Zakon upravljanja:

$$\begin{aligned} v &= k_\rho \rho \\ \omega &= k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \end{aligned}$$

- Zakon kretanja sistema sa zatvorenom povratnom spregom:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ -k_\rho \sin\alpha \end{bmatrix}$$



$$k = (k_\rho, k_\alpha, k_\beta) = (3, 8, -1.5)$$