Estimacija parametara procesa

Adaptivni sistemi – L3

Milan R. Rapaić

Katedra za automatsko upravljanje
Departman za računarstvo i automatiku
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

10. januar 2020

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Itasdi

Sadržaj

Section 1

Estimacija parametara

Estimacija i identifikacija

Estimacija parametara: Procena vrednosti nepoznatih veličina na osnovu merenih vrednosti drugih veličina koje su sa veličinama koje procenjujemo povezane poznatim matematičkim relacijama.

Estimacija parametara procesa: Određivanje nepoznatih parametara modela procesa na osnovu merenja ulaza i izlaza. Tipičan primer estimacije parametara procesa jeste estimacija koeficijenata funkcije prenosa procesa.

Identifikacija procesa: Za naše potrebe proces identifikacije i proces modelovanja možemo smatrati sinonimima. Pod identifikacijom ćemo smatrati sve postupke neophodne za uspešno opisivanje procesa odgovarajućim (matematičkim) modelom. Identifikacija može, ali i ne mora, podrazumevati estimaciju kao svoj sastavni deo.

Modeli linearni po nepoznatim parametrima

Sa stanovišta estimacije, posebno su pogodni procesi koji su linearni po parametrima.

$$z = \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \ldots + \varphi_n\theta_n$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$z = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\vartheta}$$

Primer

Estimacija parametara vremenski diskretnog procesa drugog reda

$$G(z) = \frac{bz}{z+a} = \frac{b}{1+az^{-1}} \quad \Rightarrow \quad y + ay^{-} = bu$$

$$y = -ay^{-} + bu$$

$$y = \begin{bmatrix} -y^{-} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Primer

Estimacija parametara vremenski kontinualnog procesa drugog reda

$$G(z) = \frac{b}{s+a} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} + ay = bu$$

Neposredno nalazimo,

$$\dot{y} = -ay + bu$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Primer

Estimacija parametara linearnih, kontinualnih procesa u opštem slučaju

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_f(z)Y(z)}{G_f(z)U(z)} = \frac{Y_f(z)}{U_f(z)} \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_f(s)Y(s)}{G_f(s)U(s)} = \frac{Y_f(s)}{U_f(s)}$$

- Filtriranjem ulaza i izlaza ne menja se dinamička zavisnost između ulaza i izlaza. Međutim, filtriranjem se može znatno poboljšati odnos snage signala i šuma u merenim podacima.
- Prilikom identifikacije vremenski kontinualnih procesa, ukoliko izvodi ulaznih i izlaznih promenljivih nisu neposredno merljivi, neophodno je filtrirati ulaze i izlaze pre diferenciranja.

Section 2

Metod najmanjih kvadrata

Kratka istorija metode najmanjih kvadrata

1722. Jedan od prvih koji je uočio da se ponavljanjem istog eksperimenta, a potom usrednjavanjem dobijenih vrednosti greška smanjuje uočio je Roger Cotes.

1750. Tobias Mayer koristi **metod usrednjavanja** posmatrajući (prividno) kretanje meseca.

1788. Pierre-Simon Laplace koristi isti metod prilikom posmatranja i objašnjavanja kretanja Jupitera i Saturna.

1757. Javlja se problem kombinacije observacija merenih pri različitim uslovima. Metod **najmanjih apsolutnih odstupanja** koristi Roger Joseph Boscovich prilikom istraživanja oblika zemlje.

1799. Isti problem razmatra i Pierre-Simon Laplace. U ovom periodu problem estimacije formalno je postavljen kao optimizacioni problem (mada je suštinski on to bio od samog početka). Laplas je pokušao da formira statističku raspodelu grešaka, a potom i formalni postupak iznalaženja rešenja problema. (Laplasova raspodela.)

Kratka istorija metode najmanjih kvadrata

1805. Ležandr prvi sistematski opisuje metod najmanjih kvadrata kao algebarsku proceduru za numeričko opisivanje (fitovanje) rezultata merenja linearnim modelima. Primenjuje novorazvijeni metod na proračun oblika Zemlje.

1809. Gaus objavljuje svoj metod za izračunavanje orbita i predviđanje kretanja nebeskih tela. Gaus tvrdi da je samostalno razvio metod najmanjih kvadrata 1795. Gaus takođe povezuje metod najmanjih kvadrata sa principima verovatnoće.

1810. Nakon što je dokazao cenralnu graničnu teoremu, Laplace ju je iskoristio da da široko opravdanje Gausovoj (normalnoj) raspodeli i metodu najmanjih kvadrata.

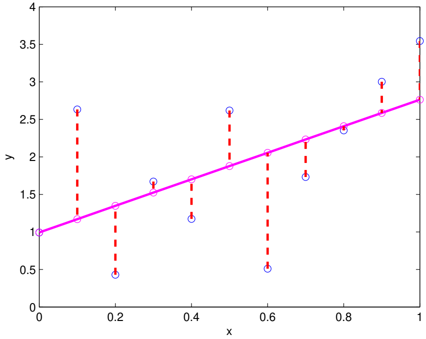
1822. Gaus je pokazao da je metod najmanjih kvadrata **optimalan** (*najbolji linearan estimator*) ukoliko su greške nekorelisane, srednje vrednosti nula i jednakih varijansi. Ovaj rezultat se ponekad naziva Gasus-Markovljevom teoremom.

Primer

Estimacija 2 nepoznata parametra na osnovu 10 merenja

$$y = ax + b$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.99	2.63	0.43	1.67	1.17	2.62	0.51	1.73	2.35	3.00	3.54



Stvarne vrednosti parametara:

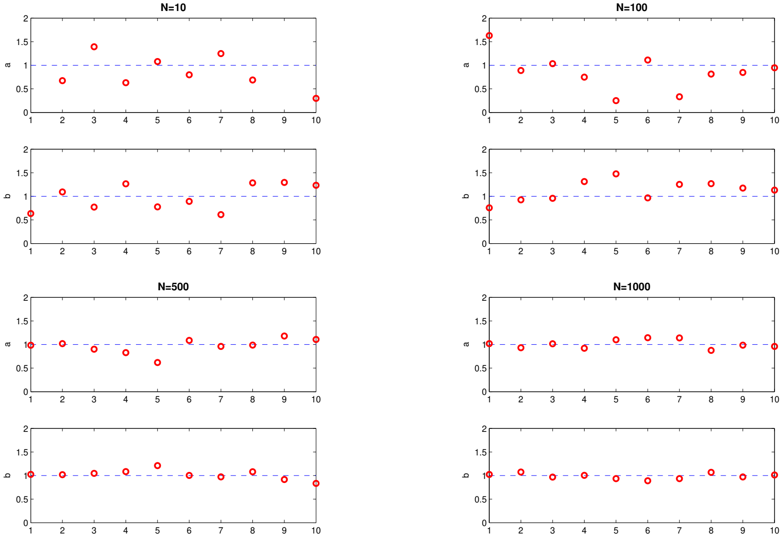
$$a = 1, \quad b = 1$$

Procenjene vrednosti parametara:

$$a^* = 1.7684, \quad b^* = 0.9940$$

Rezultati

Estimacija parametara na osnovu N uzastopnih merenja. Prikaz rezultata 10 uzastopnih pokušaja.



Algebarska postavka problema

Posmatramo više merenja ...

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \varphi_{1,1}\theta_1 + \varphi_{1,2}\theta_2 + \ldots + \varphi_{1,n}\theta_n &= \boldsymbol{\varphi}_1^T \boldsymbol{\vartheta} \\
z_2 &= \varphi_{2,1}\theta_1 + \varphi_{2,2}\theta_2 + \ldots + \varphi_{2,n}\theta_n &= \boldsymbol{\varphi}_2^T \boldsymbol{\vartheta} \\
&\vdots \\
z_N &= \varphi_{N,1}\theta_1 + \varphi_{N,2}\theta_2 + \ldots + \varphi_{N,n}\theta_n &= \boldsymbol{\varphi}_N^T \boldsymbol{\vartheta}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \\ \vdots \\ \varphi_{i,n} \end{bmatrix} \quad
\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^T \\ \boldsymbol{\varphi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N,1} & \varphi_{N,2} & \cdots & \varphi_{N,n} \end{bmatrix} \quad
\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\vartheta}
$$

Određivanje rešenja sistema jednačina $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\vartheta}$

Problem estimacije parametara svodi se na problem rešavanja sistema N linearnih jednačina po n nepoznatih.

- **N<n:** Broj merenja (jednačina) je manji od broja parametara (nepoznatih). Sistem jednačina je neodređen, a problem estimacije ima beskonačno mnogo rešenja. Postoji beskonačno mnogo različitih vrednosti parametara koje idealno opisuju posmatrana merenja.
- **N=n:** Algebarski idealan slučaj. Broj merenja i broj parametara su jednaki. Ukoliko su merenja linearno nezavisna (tj. ukoliko svako novo merenje donosi nove informacije) tada je matrica $\mathbf{\Phi}$ invertibilna, a problem estimacije ima jedinstveno rešenje:

$$\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{z}$$

- **N>n:** Broj merenja prevazilazi broj parametara. Ukoliko su merenja idealna, tada se rešenje može odrediti na osnovu proizvoljnih n nezavisnih merenja. U opštem slučaju, usled prisustva mernog šuma, dobijeni sistem je protivrečan i rešenje ne postoji.

Estimacija kao problem optimizacije

Različiti načini formiranja kriterijuma – Sva merenja su podjednako bitna

Ideja je estimirati parametre na takav način da se minimizira određeni pokazatelj odstupanja estimiranog modela od merenja.

$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$	Procenjena vrednost parametara
$\hat{z}_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$	Vrednost koju bi z_i imalo da je $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\vartheta}$
$\tilde{z}_i = z_i - \hat{z}_i$	Razlika merene i "estimirane" vrednosti u i-tom merenju

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \sum_{i=1}^{N} \left| z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right|$$

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \sum_{i=1}^{N} \left(z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right)^2$$

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \max_{i} \left| z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right|$$

Estimacija kao problem optimizacije

Različiti načini formiranja kriterijuma – Neka merenja su značajnija od drugih

Nisu uvek sva merenja ekvivalentna.

- Nisu sva merenja u istoj meri opterećena šumom.
- Nisu sva merenja izeta u istom trenutku. Starija merenja mogu biti menje relevantna ukoliko se sumnja da se ponašanje procesa menjalo.
- Ne odnose se sva merenja na siti radni opseg.

Prilikom formiranja vrednosti kriterijuma veći doprinos treba da imaju značajnija merenja. Težina pridružena nekom merenju je uvek pozitivna. Ukoliko je $w_i > w_j$, tada je i-to merenje značajnije od j-tog.

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \sum_{i=1}^{N} w_i \left| z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right|$$

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \left(z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right)^2$$

$$\min_{\boldsymbol{\vartheta}} \max_{i} w_i \left| z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right|$$

Estimacija metodom najmanjih kvadrata

Za dati matematički model procesa

$$z = \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \ldots + \varphi_n\theta_n = \boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\vartheta}$$

i dati skup merenja,

$$(z_1, \boldsymbol{\varphi}_1), (z_2, \boldsymbol{\varphi}_2), ..., (z_N, \boldsymbol{\varphi}_N)$$

odrediti estimaciju vrednosti parametara $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ..., $\hat{\theta}_n$ (odnosnu estimaciju vektora parametara $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$) koja minimizira kriterijum

$$J = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \left(z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T\hat{\theta}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \tilde{z}_i^2 \ ,$$

gde su w_i unapred zadate relativne težine pojedinih merenja.

Određivanje optimalnog rešenja

Zapis kriterijuma u matričnom obliku

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{z}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} w_1\tilde{z}_1 \\ w_2\tilde{z}_2 \\ \vdots \\ w_N\tilde{z}_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{e}^T\mathbf{e} = (\mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}})^T\,\mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}} \\ &= \left(\mathbf{z} - \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\right)^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\left(\mathbf{z} - \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\right) \\ &= \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^T\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} - 2\mathbf{z}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{z}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{z} \end{aligned}$$

Uvođenjem smene: $\check{\mathbf{z}} = \mathbf{W}\mathbf{z}$, $\check{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Phi}$

$$J = \boldsymbol{\vartheta}^T\check{\boldsymbol{\Phi}}^T\check{\boldsymbol{\Phi}}\boldsymbol{\vartheta} - 2\check{\mathbf{z}}^T\check{\boldsymbol{\Phi}}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \check{\mathbf{z}}^T\check{\mathbf{z}}$$

Potrebni uslovi optimalnosti

Normalne jednačine

$$J = \boldsymbol{\vartheta}^T \check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} - 2\check{\mathbf{z}}^T \check{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \check{\mathbf{z}}^T \check{\mathbf{z}}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\vartheta}} J = 2\check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* - 2\check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Potrebni uslovi optimalnosti se dobijaju formi posebnog sistema linearnih jednačina koje nazivamo **normalnim jednačinama**

$$\check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\mathbf{z}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{z}}$$

Rešavanje normalnih jednačina
Eksplicitno rešenje

Normalnim jednačinama se smatra bilo koji sistem linearnih jednačina

$$\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{\Phi}}\boldsymbol{\vartheta} = \check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{z}}$$

Sistem normalnih jednačina je jednoznačno rešiv ukoliko je matrica $\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{\Phi}}$ strogo pozitivno definitna, odnosno ukoliko su joj sve svojstvene vrednosti pozitivne.

Eksplicitnim rešavanjem sistema normalnih jednačina, nalazimo

$$\boldsymbol{\vartheta} = \left(\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{\Phi}}\right)^{-1}\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{z}} = \check{\mathbf{\Phi}}^\dagger\check{\mathbf{z}}$$

Matrica

$$\check{\mathbf{\Phi}}^\dagger = \left(\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{\Phi}}\right)^{-1}$$

naziva se Penroze-Moore pseudo-inverzijom matrice $\check{\mathbf{\Phi}}$.

Rešavanje normalnih jednačina

Numeričko rešenje

Postoji veći broj načina za efikasno rešavanje normalnih jednačina. Eksplicitno rešenje je poželjno samo u malom broju slučajeva.

- **Cholseki dekompozicija.** S obzirom da je $\check{\mathbf{\Phi}}^T\check{\mathbf{\Phi}}$ pozitivno definitna, može se dekomponovati u formi $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$, gde je $\mathbf{R}$ gornja trougaona, kvadratna matrica. Sada se normalne jednačine mogu rešiti u dva prolaza, jednostavnom sukcesivnom smenom.
- **Ortogonalna dekompozicija – QR.**
- **Dekompozicija singularnih vrednosti – SVD.**

Optimalna estimacija metodom najmanjih kvadrata

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \left(\check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{-1} \check{\boldsymbol{\Phi}}^T \check{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{z}$$

Section 3

Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

Rekurzivna implementacija

Osnovne postavke

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{z}$$

Uvođenjem pomoćnih veličina

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{\Phi}\,, \quad \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{z}$$

nalazimo da se optimalna estimacija može zapisati u obliku

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{P}\mathbf{r}$$

Matrica $\mathbf{R}$ se naziva **matricom otežanih (ponderisanih) kovarijansi** i ima značajnu ulogu u analizi metode najmanjih kvadrata.

Vrednosti veličina $\mathbf{R}$ i $\mathbf{r}$, te samim tim i vrednost $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, mogu se na efikasan način ažurirati (poboljšavati) svakim novim merenjem.

Rekurzivna implementacija

Matrica kovarijanse

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T = \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T + w_N^2 \boldsymbol{\varphi}_N \boldsymbol{\varphi}_N^T$$

Usvojićemo konvenciju po kojoj $(\cdot)^+$ označava vrednost veličine u sledećoj iteraciji, a $(\cdot)^-$ u prethodnoj iteraciji. Tako je $\mathbf{R}^+$ vrednost matrice kovarijanse u narednoj iteraciji. Slično, indekse ćemo izostavljati kod svih veličina koje se odnose na tekuću iteraciju. Tako, recimo w i $\boldsymbol{\varphi}$, bez indeksa, odnose se na vrednost težine i regresora u tekućoj iteraciji.

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}^- + w^2 \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T}$$

Rekurzivna implementacija

Lema o inverziji matrica

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

Formalnim smenama:

$$A := \mathbf{R}\,, \quad B := w\boldsymbol{\varphi}\,, \quad C := 1\,, \quad D := w\boldsymbol{\varphi}^T$$

$$\left(\mathbf{R}^- + w^2\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\right)^{-1} = (\mathbf{R}^-)^{-1} - w^2\frac{(\mathbf{R}^-)^{-1}\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{R}^-)^{-1}}{1 - w^2\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{R}^-)^{-1}\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}^- - w^2\frac{\mathbf{P}^-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^-}{1 - w^2\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^-\boldsymbol{\varphi}}}$$

Rekurzivna implementacija

Ažuriranje tekuće estimacije parametara

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i z_i$$

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i z_i = \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i z_i + w_N^2 \boldsymbol{\varphi}_N z_N$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{r}^- + w^2 \boldsymbol{\varphi} z \\
\mathbf{R}\boldsymbol{\vartheta} &= \mathbf{R}^- \boldsymbol{\vartheta}^- + w^2 \boldsymbol{\varphi} z \\
&= \left(\mathbf{R} - w^2 \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\right) \boldsymbol{\vartheta}^- + w^2 \boldsymbol{\varphi} z \\
&= \mathbf{R}\boldsymbol{\vartheta}^- + w^2 \boldsymbol{\varphi} \left(z - \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\vartheta}^-\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^- + w^2 \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi} \left(z - \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\vartheta}^-\right)}$$

Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

- Na početku se izabere početno pogađanje $\boldsymbol{\vartheta}(0) = \boldsymbol{\vartheta}_0$.
- Matrica $\mathbf{P}$ se inicijalizuje nekom "velikom" vrednošću. Obično se uzima dijagonalna matrica sa velikim, pozitivnim vrednostima dijagonalnih elemenata, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(0) = c\mathbf{I}$, gde je $c >> 1$ (obično c bude reda veličina nekoliko stotina, hiljada, pa i više).

U svakoj iteraciji:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-} - w^2 \frac{\mathbf{P}^{-}\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^{-}}{1 - w^2\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^{-}\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^{-} + w^2\mathbf{P}\boldsymbol{\varphi}\left(z - \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\vartheta}^{-}\right)$$

Section 4

Rekurzivna estimacija sa faktorom zaboravljanja

Faktor zaboravljanja

Faktor zaboravljanja se uvodi ukoliko se želi ograničiti ,,memorija'' algoritma. Uvođenjem faktora zaboravljanja, estimacija se efektivno vrši samo na osnovu bliske prethodne istorije ponašanja procesa, a ne od trenutke u kome je započet proces estimacije.

$$J = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{N-i} \left(z_i - \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\theta} \right)^2$$

Faktor zaborabljanja, $\lambda \in (0,1)$, definiše vremenski promenljivi težinski faktor koji favorizuje ,,skorija'' merenja.

Zbog promenljive prirode težinskog faktora (kako vreme teče tako se relativni značaj odbiraka menja), metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja se ne može trivijalno svesti na rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa težinskim faktorom.

Rekurzivna implementacija

Matrica kovarijanse

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{N-i} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T = \lambda \sum_{i=1}^{N-1} \lambda^{N-1-i} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T + \boldsymbol{\varphi}_N \boldsymbol{\varphi}_N^T$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}^- + \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{P}^- - \frac{\mathbf{P}^- \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P}^-}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P}^- \boldsymbol{\varphi}} \right)}$$

Rekurzivna implementacija

Ažuriranje tekuće estimacije parametara

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{N-i} \boldsymbol{\varphi}_i z_i = \lambda \sum_{i=1}^{N-1} \lambda^{N-1-i} \boldsymbol{\varphi}_i z_i + \boldsymbol{\varphi}_N z_N$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}^- + \boldsymbol{\varphi} z}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\boldsymbol{\vartheta} &= \lambda \mathbf{R}^- \boldsymbol{\vartheta}^- + \boldsymbol{\varphi} z \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{R} - \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T \right) \right) \boldsymbol{\vartheta}^- + \boldsymbol{\varphi} z = \mathbf{R}\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\varphi} \left(z - \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\vartheta} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^- + \mathbf{P}\boldsymbol{\varphi} \left(z - \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\vartheta} \right)}$$

Rekurzivna estimacija sa faktorom zaboravljanja

- Na početku se izabere početno pogađanje $\boldsymbol{\vartheta}(0) = \boldsymbol{\vartheta}_0$.
- Matrica $\mathbf{P}$ se inicijalizuje nekom "velikom" vrednošću. Obično se uzima dijagonalna matrica sa velikim, pozitivnim vrednostima dijagonalnih elemenata, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(0) = c\mathbf{I}$, gde je $c >> 1$ (obično c bude reda veličina nekoliko stotina, hiljada, pa i više).

U svakoj iteraciji:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{P}^{-} - \frac{\mathbf{P}^{-}\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^{-}}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{P}^{-}\boldsymbol{\varphi}}\right)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}^{-} + \mathbf{P}\boldsymbol{\varphi}\left(z - \boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\vartheta}\right)$$