Deterministički procesi odlučivanja
Problem određivanja najkraćeg puta kroz graf

Adaptivni sistemi – L1b

Milan R. Rapaić

Katedra za automatsko upravljanje
Departman za računarstvo i automatiku
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

10. januar 2020

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

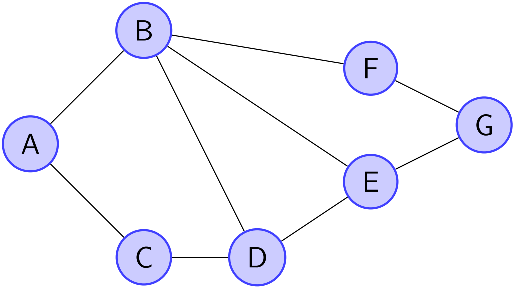
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Itasdi

Sadržaj

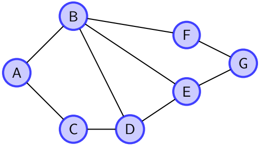
Šta je graf?

Graf je skup **čvorova** međusobno povezanih **ivicama**. Kažemo dva su dva čvora *susedna* jedan drugom ukoliko su neposredno povezana ivicom.



Matrica susedstva

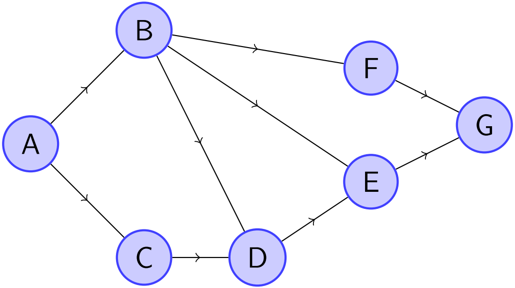
Matrica susedstva grafa je kvadratna matrica, dimenzije jednake broju čvorova, čiji element na poziciji i, j ima vrednost 1 ukoliko su odgovarajući čvorovi susedni, a vrednost 0 ukoliko nisu.



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

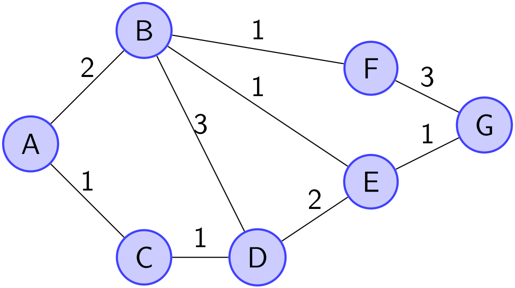
Neusmereni i usmereni grafovi?

Graf je usmeren (eng. *directed graph* – **digraph**) ukoliko se po ivicama možemo kretati samo u naznačenom smeru. Neformalno govoreći, ivice neusmerenog grafa su dvosmerne, dok su u usmerenim grafovima one jednosmerne.



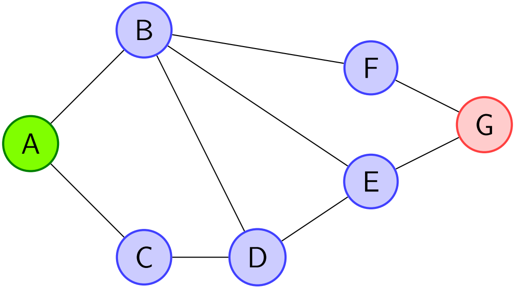
Otežani grafovi

Graf je otežan ukoliko je svakoj njegovoj ivici pridružena vrednost. Tu vrednost možemo smatrati cenom prelaska date ivice.



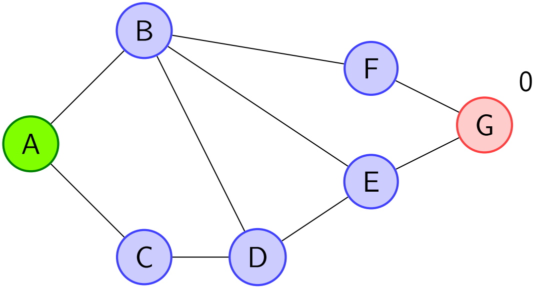
Graf može istovremeno biti i otežan i usmeren.

Koji je najkraći put od A do G?



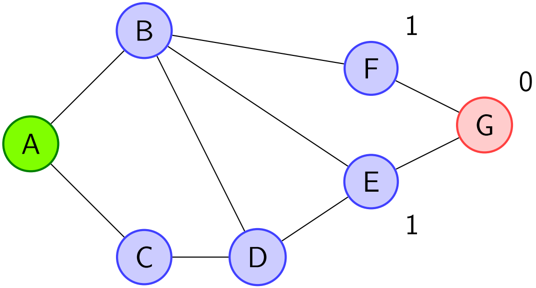
Rešenje primenom metodom DP 1/x

Početi od ciljnog čvora – G. Ako se nalazimo u G, već smo stigli do cilja, i preostalo rastojanje je 0. Pridružiti to rastojanje čvoru.

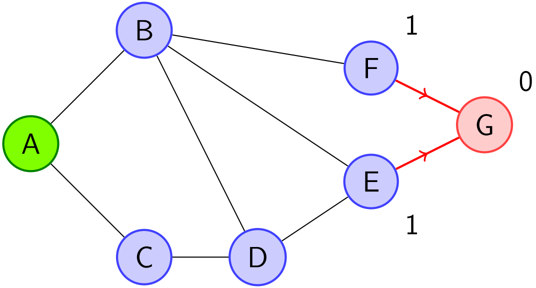


Rešenje primenom metodom DP 2/x

Pomeriti se unazad ka susednim čvorovima: E i F. Pošto se od njih do ciljnog čvora G dolazi u jednom koraku, pridružiti im vrednost 1.



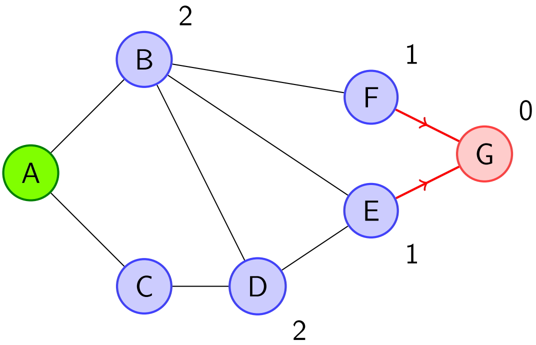
Rešenje primenom metodom DP 3/x



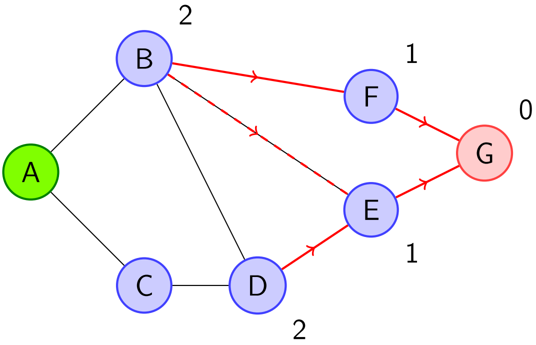
Rezultat nakon prvog koraka jeste da znamo minimalno rastojanje za E i F, kao i putanje kojima se od E i F najbrže stiže do cilja G.

Rešenje primenom metodom DP 4/x

Ponoviti postupak, polazeći od čvorova E i F. Problem je sada, dakle, kako najbrže stići do E i F, pošto od njih poznajemo najkraći put do G. Tako stižemo do čvorova B i D, kojima pridružujemo vrednosti 2.



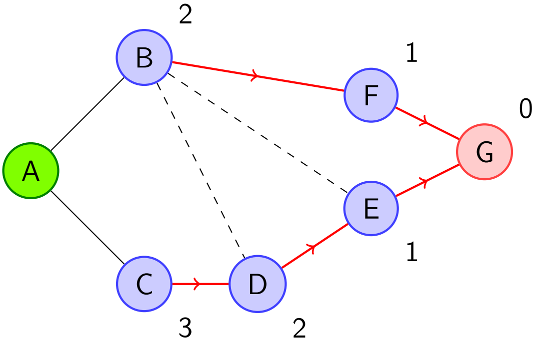
Rešenje primenom metodom DP 5/x



Od čvora D, najkraći put do čvora G *nedvosmisleno* vodi preko E (barem na osnovu za sada dostipnih informacija, koje će se ispostaviti kao tačne). Međutim, od čvra B, do G je moguće stići podjedanko brzo na dva načina: preko E ili preko F. Proizvoljno biramo jedan (recimo, preko F) i nastavljamo dalje.

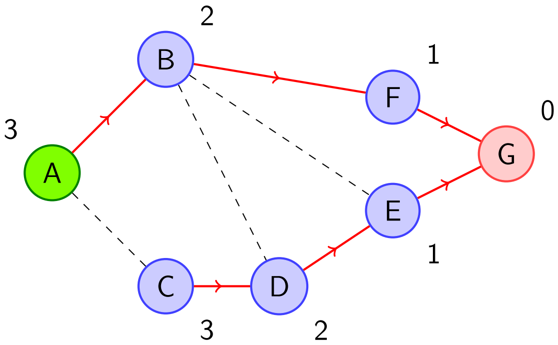
Rešenje primenom metodom DP 6/x

Polazeći od čvora D, čiji smo najkraći put dužine 2 već pronašli, dolazimo do C i (ponovo) B. Njihova vrednost bi trebala biti 2+1=3. Međutim, kako je prethodno određeni put od B do G kraći (dužine je 2), novootrkiveni put zanemarujemo.

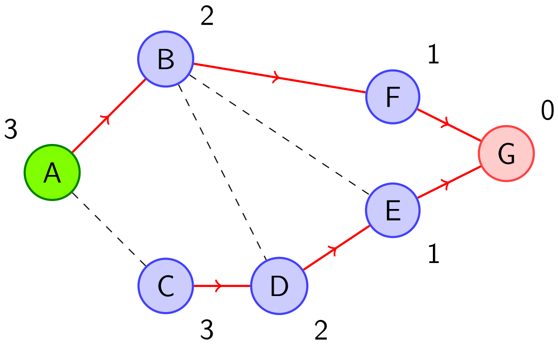


Rešenje primenom metodom DP 7/x

Konačno, do polaznog čvora A možemo stići bilo preko B bilo preko C. Ukoliko bismo se kretali preko B, dužina puta bi bila 2+1=3; dok bi preko čvora C dužina puta iznosila 3+1=4. Odmah zaključujemo da je najkraći put od A do G dužine 3 i da vodi preko B.



Rešenje primenom metodom DP 8/x



Pošto smo prošli kroz sve ivice (koje su ili odbačene ili pripadaju najkraćim putanjama), zaključujemo da je kompletan graf razmotren. Brojevi pridruženi čvorovima su zaista dužine najkraćih puteva od tig čvorova do G. Usmerene strelica označavaju određene najkraće putanje.

Rešenje primenom metodom DP 9/x

Rešavajući problem iznalaženja najkraće putanje od A do G metodom dinamičkog programiranja rešili smo jedan značajno opštiji problem: pronašli smo najkraći put od svakog čvora do G.

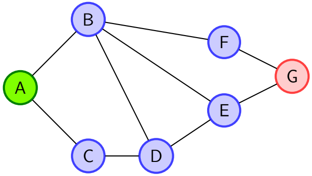
čvor	rastojanje do G	optimalno kretanje ka
A	3	B
B	2	F
C	3	D
D	2	E
E	1	G
F	1	G
G	0	–

Agent, okolina, akcija

- AGENT jeste onaj ko donosi odluku, onaj ko se kreće ili onaj koji rukovodi tuđim kretanjem po grafu.
- OKOLINA je sam graf.
- STANJE je čvor u kome se trenutno nalazimo prilikom kretanja.
- U svakom čvoru (stanju) možemo birati kojom granom grafa prelazimo u naredni čvor (stanje): to su AKCIJE.

Skupovi dopustivih akcija

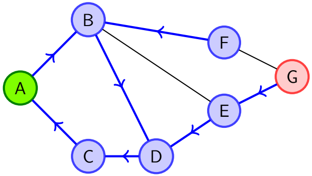
čvor s	skup dopustivih akcija $\mathcal{A}(s)$
A	{ B, C }
B	{ A, D, E, F }
C	{ A, D }
D	{ C, B, E }
E	{ D, B, G }
F	{ B, G }
G	{ E, F }



Strategija

STRATEGIJA je pravilo koje svakom stanju (čvoru) pridružuje prelaz (granu grafa) koja ga vodi u naredno stanje.

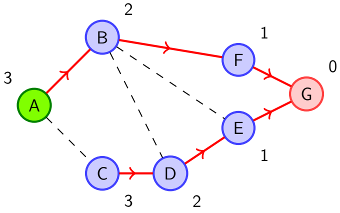
čvor s	naredni čvor $u(s)$
A	B
B	D
C	A
D	C
E	D
F	B
G	E



Optimalna strategija

OPTIMALNA strategija je pravilo koje svakom stanju (čvoru) pridružuje prelaz (granu grafa) koja ga vodi u naredno stanje, tako da se na najbrži mogući način stigne do ciljnog čvora (u ovom slučaju G).

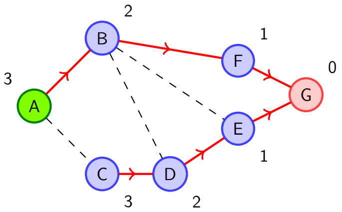
čvor s	naredni čvor $u^*(s)$
A	B
B	F
C	D
D	E
E	G
F	G
G	-



Vrednost čvora

VREDNOST čvora jeste dužina najkraćeg puta kojim se od tog čvora dolazi do cilja (u ovom slučaju čvora G).

čvor s	vrednost čvora $v(s)$
A	3
B	2
C	3
D	2
E	1
F	1
G	0



Pojmovnik

srpski	oznaka	engleski
graf		graph
čvor		vertex / node
ivica / veza		edge / link
matrica susedstva	$\mathbf{A}$	Adjacency matrix